

3 分離公理

今回は位相空間に可算性を導入した。これからいろいろ大切な性質が導入されていくが、特に大事なのは、今回やる分離公理、そして後でやるコンパクト性、連結性である。

3.1 T_0 空間

分離公理のうちで一番地味なものから始めよう。

定義 3.1 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。もし任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して、どちらか一方の開近傍で他方を含まないものが存在するとき、 $(X, \mathcal{O})$ を T_0 空間という。

もちろん **1 点だけからなる位相空間は T_0 である**。 T_0 のポイントは、「どちらか一方」により開近傍を取れるということである。簡単な例で考えてみよう。

問題 96 (1pt) X に離散位相を入れる。このとき X は T_0 空間である。

問題 97 (1pt) X を 2 点以上含む空間として密着位相を入れる。このとき X は T_0 空間でない。

問題 98 (1pt) $X = \{a, b, c\}$ として、位相を $\mathcal{O} := \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ と定めると、 T_0 空間でない (点 b と c が「密着している」!)。

3.2 T_1 空間

次に T_1 空間である。

定義 3.2 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。もし任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して、 x の開近傍で y を含まないものと、 y の開近傍で x を含まないものが存在し、 $(X, \mathcal{O})$ を T_1 空間という。

T_0 との違いは、 x, y の両方ともがよい開近傍 (これらは交わってしまうかもしれないが) をもつということである。

問題 99 (1pt) 離散位相空間は T_1 であることを示せ。

有限集合についてはこの逆もなりたつ。

問題 100 (1pt) 有限集合 X にある位相を入れて T_1 空間にしたとすると、この位相は離散位相であることを示せ。

大事な定理として次がある。

問題 101 (1pt) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。このとき次は同値。

- (1) $(X, \mathcal{O})$ は T_1 空間である。
- (2) 任意の点 $a \in X$ に対して、1 点集合 $\{a\}$ は閉集合である。

問題 102 (1pt) T_1 なら T_0 であることを示せ.

この逆は成り立たないことを示そう.

問題 103 (1pt) $X = \{a, b, c\}$ として, 位相を $\mathcal{O} := \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ と定めると, T_0 空間であるが, T_1 空間でないことを示せ.

問題 104 (2pt) Sorgenfrey 直線は T_1 空間であることを示せ.

3.3 T_2 空間 (ハウスドルフ空間)

分離公理の中で最も重要な性質と言っても過言でない. 対外目にするものはハウスドルフである (もちろんハウスドルフでない重要な対象もあるけれど. 例えば Zariski 位相空間).

定義 3.3 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. もし任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して, x の開近傍 U と y の開近傍 V が交わらないように, つまり $U \cap V = \emptyset$ をみたすように存在するとき, $(X, \mathcal{O})$ を T_2 空間 (Hausdorff space, ハウスドルフ空間) という.

問題 105 (1pt) 離散位相空間は T_2 であることを示せ.

問題 106 (1pt) T_2 なら T_1 であることを示せ.

逆が成り立たないことを示したいのだが, 問題 100 があるため反例は有限集合では見つからない. そこで cofinite topology を使って反例を作ろう.

問題 107 (1pt) cofinite topology を $\mathbb{R}$ に入れると, T_1 空間だがハウスドルフではないことを示せ.

問題 108 (1pt) 距離位相空間は T_2 であることを示せ.

問題 109 (1pt) ハウスドルフ空間の部分位相空間はハウスドルフであることを示せ.

問題 110 (1pt) 次が同値であることを示せ.

- (1) 位相空間 X はハウスドルフである.
- (2) 対角線集合 $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ が直積位相空間 $X \times X$ の閉集合である.

問題 111 (1pt) 次が同値であることを示せ.

- (1) 位相空間 X はハウスドルフである.
- (2) 任意の位相空間 Y と任意の連続写像 $f, g: Y \rightarrow X$ に対して, Y の部分集合 $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$ は閉集合である.
- (3) 任意の位相空間 Y と任意の連続写像 $f: Y \rightarrow X$ に対して, f のグラフ $G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in Y\}$ は $Y \times X$ の閉集合である.

上の (3) で $Y = X$, $f = \text{id}_X$ としたときに $G(f) = \Delta$ だから問題 110 の一般化になっている.

問題 112 (1pt) X, Y を空でないハウスドルフ空間とする. このとき $X \times Y$ はハウスドルフであることを示せ.

問題 113 (1pt) X, Y を空でない位相空間とすると, 上の問題の逆も成り立つことを示せ.

問題 114 (2pt) Sorgenfrey 直線は T_2 空間であることを示せ.

3.4 T_3 空間, 正則空間

次に T_3 公理について学ぼう.

定義 3.4 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. もし点 $x \in X$ と閉集合 $F \subset X$ が $x \notin F$ をみたすならば, つねに開集合 U, V が

$$x \in U, \quad F \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

をみたすように存在するとき, $(X, \mathcal{O})$ を T_3 空間という.

ここでポイントは **1 点からなる集合が閉集合とは言っていない**ので, T_3 ならば T_2 とは言えないことである. 数学で相手にする大体の空間は 1 点が閉なことが多いので改めて次のように定義する.

定義 3.5 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が T_1 かつ T_3 のとき, **正則空間 (regular)** であるという.

問題 115 (1pt) 離散位相空間は正則空間であることを示せ.

問題 116 (1pt) 正則空間はハウスドルフ空間であることを示せ.

問題 117 (1pt) T_3 空間であるための必要十分条件は, 任意の点において, 閉集合からなる基本近傍系がとれることであることを示せ.

問題 118 (2pt) Sorgenfrey 直線を考える. 次を示せ.

- (1) $a \in \mathbb{R}$ に対して, 無限区間 $(-\infty, a)$ と $[a, \infty)$ は開かつ閉集合であることを示せ.
- (2) 半開区間 $[a, b)$ ($a < b$) は開かつ閉集合であることを示せ.
- (3) $N(a) := \{[a, b) \mid b > a\}$ とおくと, 閉集合からなる点 a の基本近傍系であることを示せ.
- (4) Sorgenfrey 直線は正則であることを示せ.

問題 119 (1pt) 2 つの正則空間の直積は正則であることを示せ.

3.5 T_4 空間と正規空間

定義 3.6 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. もし互いに交わらない閉集合 $F_1, F_2 \subset X$ が $x \notin F$ をみたすならば, つねに開集合 U, V が

$$F_1 \subset U, \quad F_2 \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

をみたすように存在するとき, $(X, \mathcal{O})$ を T_4 空間という.

これも T_3 と同じく, 1 点が閉とは限らないので不便であるから次の概念を導入する.

定義 3.7 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が T_1 かつ T_4 のとき, **正規空間 (normal)** であるという.

注意 1 ややこしいことに文献によってはこの演習での正則性, 正規性が T_3, T_4 の定義になっていて, この演習での T_3, T_4 が正則性, 正規性となっていることもある. 本を読むときは何が著者の定義なのかをはっきりさせておこう.

問題 120 (1pt) (X, d) を距離空間として, $F \subset X$ を閉集合とする. 今 $x \in X$ に対して,

$$d(x, F) := \inf_{a \in F} d(x, a)$$

と定めると次がなりたつことを示せ.

$$(1) d(x, F) = 0 \iff x \in F.$$

(2) 関数 $X \ni x \mapsto d(x, F) \in \mathbb{R}$ は連続である.

正規空間についてまず覚えなければならないのが次の定理.

問題 121 (1pt) 距離位相空間は正規であることを示せ.

問題 122 (1pt) 正規ならば正則であることを示せ.

問題 123 (2pt) Sorgenfrey 直線 S は正規であることを次の手順で示せ.

(1) A, B を S の閉集合で $A \cap B = \emptyset$ とする. 各 $a \in A$ に対して, $[a, c) \cap B = \emptyset$ となる $c \in \mathbb{R}$ が存在すること示せ (ヒント: 閉集合, 閉包の定義と問題 118(3)).

(2) そのような c を一つ取り $\lambda(a)$ とおく. 同様に各 $b \in B$ に対しても $[b, \mu(b)) \cap A = \emptyset$ となる $\mu(b) \in \mathbb{R}$ を取る. すると $[a, \lambda(a)) \cap [b, \mu(b)) = \emptyset$ であることを示せ.

(3) 最後に

$$U := \bigcup_{a \in A} [a, \lambda(a)), \quad V := \bigcup_{b \in B} [b, \mu(b)).$$

とおくと両方とも開集合であり, 共通部分がなく $A \subset U, B \subset V$ をみたすことを示せ.

問題 124 (3pt) Sorgenfrey 直線 S の直積 $S \times S$ は正規でないことを示せ (本で調べるか僕に聞いてください).

特に次が分かった. 正規空間はハウスドルフよりも「よい」空間なのだが, 直積にすると正規性が壊れてしまうこともある. 問題 112, 問題 119 と問題 124 の結果をまとめておくとつぎのようになる.

豆知識 1 2つのハウスドルフ空間 (正則空間) の直積はまたハウスドルフ空間 (正則空間) だが, 2つの正規空間の直積は正規とは限らない.

問題 125 (1pt) X を T_i 空間 ($i = 0, 1, 2, 3$) とし, $A \subset X$ を部分位相空間とすると, A も T_i 空間 ($i = 0, 1, 2, 3$) であることを示せ.

豆知識 2 T_4 空間の部分位相空間は必ずしも T_4 でないことが知られている.

問題 126 (1pt) X を T_4 空間 (正規空間) とし $A \subset X$ を閉集合とすると, 部分位相空間 A も T_4 空間 (正規空間) であることを示せ.

さて正規空間で覚えておかないといけない定理をもう 3 つ.

問題 127 (1pt) ウリゾーンの補題を述べよ.

問題 128 (1pt) ティーツェの拡張定理を述べよ.

問題 129 (1pt) ウリゾーンの距離付け可能定理を述べよ. 位相空間が距離付け可能という意味も述べよ.

問題 130 (1pt) Sorgenfrey 直線は距離付け不可能であることを示せ.