

4 連結性

今回は連結性について学ぼう。大雑把に言えば「つながっていること」である。例えば $\mathbb{R}$ や円周なんかは (普通の位相では) 連結であることは見た目からも明らかである。これをちゃんと定義することから始めよう。

4.1 連結性の定義

定義 4.1 X を位相空間とする。2 つの開集合 U_1, U_2 が次の条件をみたせば

$$X = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset,$$

必ず $U_1 = X$ または $U_2 = X$ である時, X は**連結 (connected)** であるという。また, 部分集合が連結であるということは, 部分位相空間として連結であることと定める。

問題 131 (1pt) 次が同値であることを示せ。

- (1) 位相空間 X は連結である。
- (2) X の開かつ閉集合は, 空集合か X のどちらかである。

問題 132 (1pt) X を位相空間とし, $A \subset X$ とする。次が同値であることを示せ (定義の言い換え)。

- (1) A は連結である。
- (2) もし X の開集合 U_1, U_2 が,

$$B \subset U_1 \cup U_2, \quad B \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

ならば, 必ず $B \cap U_1 = B$ か $B \cap U_2 = B$ のどちらかが成り立つ。

問題 133 (1pt) $\mathbb{R}$ の連結な部分集合はどういうものか (証明もせよ)?

問題 134 (1pt) $\mathbb{R}$ の半开区間と开区間 (閉区間) は同相でないことを示せ (1 点を取り除くトリックを使え)。

問題 135 (1pt) 離散位相空間 X が連結であったとすると, X は 1 点集合であることを示せ。

問題 136 (1pt) 密着位相空間は連結であることを示せ。

次の結果は結構役に立つ。

問題 137 (1pt) X を位相空間とする。次が同値であることを示せ。

- (1) X は連結である。
- (2) すべての連続関数 $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ は定値写像である ($\{0, 1\}$ は離散位相空間)。

この応用で次を示そう。

定理 4.2 位相空間の部分集合 A が連結であれば、 $A \subset B \subset \overline{A}$ となる B はすべて連結である。とくに $\overline{A}$ も連結である。

そのためにまず次の補題をやっておく。

問題 138 (1pt) $f, g: X \rightarrow Y$ を位相空間 X, Y の間の 2 つの連続写像とする。もし $A \subset X$ 上で $f = g$ であれば、 $\overline{A}$ 上でも $f = g$ であることを示せ。

問題 139 (1pt) 問題 137 を用いて、定理 4.2 を示せ。

問題 140 (1pt) 定理 4.2 を使って、円周が連結であることを示せ。

次に連結性が連続写像で保たれることを示そう。

定理 4.3 X, Y を位相空間、 $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。もし $A \subset X$ が連結ならば、 $f(A)$ も連結である。

問題 141 (1pt) 上の定理を示せ。

問題 142 (1pt) 定理 4.3 を用いて、問題 140 を示せ。

定理 4.4 (中間値の定理) X を連結位相空間、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を連続写像とすると、 $f(X)$ は 1 点集合か区間である。

次も大事である (イメージ図を描こう)。

定理 4.5 X を位相空間、 A_λ を連結部分集合の族とする ($\lambda \in \Lambda$)。もしも任意の A_λ, A_μ が交われば、合併 $\bigcup_\lambda A_\lambda$ も連結となる。

問題 143 (1pt) 定理 4.5 を示せ。

問題 144 (1pt) 定理 4.5 を用いて、単位球面 S^2 が連結であることを示せ。 $S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ についても考えよ。

次に直積集合について考えよう。

定理 4.6 空でない連結位相空間 X_λ の直積 $\prod_\lambda X_\lambda$ は連結である。

問題 145 (1pt) 定理 4.6 を示せ。

問題 146 (1pt) $\mathbb{R}^n$ が連結であることを示せ。

問題 147 (1pt) $n \geq 2$ とする。 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^n$ は同相でないことを示せ。

4.2 連結成分

問題 148 (1pt) X を位相空間とし、1 点 $x \in X$ をとる。 x を含む連結部分集合のうち最大のものが存在することを示せ (定理 4.5 を用いよ)。

定義 4.7 上の問題で考えた最大の連結部分集合のことを点 x の連結成分とよぶ。

問題 149 (1pt) 連結成分は閉集合であることを示せ (問題 4.2 を用いよ)。