

4 連結性つづき

4.2 連結成分つづき

問題 131 (1pt) X を位相空間とし, 1 点 $x \in X$ をとる. x を含む連結部分集合のうち最大のものが存在することを示せ (定理 4.5 を用いよ).

定義 4.1 上の問題で考えた最大の連結部分集合のことを点 x の連結成分とよぶ.

問題 132 (1pt) 連結成分は閉集合であることを示せ (定理 4.2 を用いよ).

問題 133 (1pt) 2 つの連結成分は, 一致してしまうかあるいは, 交わりをもたないかのどちらかであることを示せ.

問題 134 (1pt) 任意の位相空間は連結成分の直和として表せることを示せ.

おまけとして次の位相空間も憶えておこう. 連結から程遠い空間である.

定義 4.2 X を位相空間とする. 任意の点 $x \in X$ の連結成分が $\{x\}$ となるとき, X は**完全不連結** (totally disconnected) であるという.

問題 135 (1pt) X を位相空間とする. 次は同値であることを示せ.

- (1) X は完全不連結である.
- (2) 任意の部分集合は不連結である.

問題 136 (1pt) 離散位相空間は完全不連結であることを示せ.

問題 137 (1pt) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で完全不連結であることを示せ.

問題 138 (1pt) Sorgenfrey 直線は完全不連結であることを次の手順で示せ.

- (1) 半開区間は開かつ閉集合である.
- (2) 任意の部分集合は連結でない.
- (3) Sorgenfrey 直線は完全不連結である.

4.3 弧状連結性

もう 1 つ重要な概念を紹介する.

定義 4.3 X を位相空間とし, $A \subset X$ とする. A が**弧状連結** (path connected) であるとは, 任意の 2 点 $x, y \in A$ が連続な道 (continuous path) で結べること, つまりある連続写像 $\omega: [0, 1] \rightarrow A$ が存在して, $\omega(0) = x, \omega(1) = y$ をみたすことである.

上のような写像 ω を連続な道とよぶ. $A \neq X$ のときのポイントは, 途中の点 $\omega(t)$ は A の中に入っていることである. 途中で A の外に出てはいけない.

問題 139 (1pt) 弧状連結性のイメージ図を描け.

問題 140 (1pt) 弧状連結ならば連結である.

弧状連結をみることは連結性を調べるよりも簡単なことが多いので上の問題は重要である. しかし逆は成り立たないことに注意 (次の例).

問題 141 (2pt) 関数 $\sin(1/x)$ のグラフで与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin(1/x), x > 0\}$$

を考える.

(1) 写像 $f: (0, \infty) \rightarrow A$ を $f(x) = (x, \sin(1/x))$ によって定めると, f は同相であることを示せ. とくに A は連結である.

(2) $\overline{A}$ は連結であることを示せ (No. 6 定理 4.2). また $\overline{A} = A \cup \{(0, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ も示せ.

(3) $\overline{A}$ の 2 点 $(0, 0)$, $(1/\pi, 0)$ は連続な道で結べないことを示せ. 特に $\overline{A}$ は弧状連結でない.

しかしよい空間では連結性と弧状連結性とは同値である. これはまたおいおいやっぺいこう.

問題 142 (1pt) 弧状連結集合の連続像は弧状連結であることを示せ.

問題 143 (1pt) 弧状連結位相空間の直積は弧状連結であることを示せ.

問題 144 (1pt) $\mathbb{R}$ が弧状連結であることを示せ. これから $\mathbb{R}^n$ が連結であることも示せ.

問題 145 (1pt) n 次元球面 $S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ は弧状連結であることを示せ.

問題 146 (1pt) $X = \{a, b, c\}$ に適当に位相を入れて, 弧状連結に出来るか?

連結成分にならない, 弧状連結成分を次のように定義する.

定義 4.4 位相空間 X の点 $x \in X$ を考える. x と連続な道で結ぶことの出来る点全体の集合 P_x を x の**弧状連結成分**という.

問題 147 (1pt) 位相空間の弧状連結成分への分解を連結成分への分解にならって定式化せよ.

問題 148 (1pt) $A, B \subset X$ を位相空間 X の弧状連結部分集合とする. もし $A \cap B \neq \emptyset$ ならば, $A \cup B$ は弧状連結であることを示せ.

問題 149 (1pt) 弧状連結成分は連結成分と異なり閉集合とは限らない. その例をあげよ.

問題 150 (1pt) $n \times n$ 行列の空間 $M_n(\mathbb{R})$ に距離を定めてみよ (ヒント: $M_n(\mathbb{R})$ はベクトル空間として $\mathbb{R}^{n^2}$ に同型).

問題 151 (2pt) 上の問題の距離位相によって $M_2(\mathbb{R})$ に位相を入れる. このとき $GL_n(\mathbb{R})_+ := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$ は連結であることを示せ (ヒント: ジョルダン標準型).

参考文献

矢野公一 距離空間と位相構造 (具体例が沢山のっていて勉強になる)