

1 位相について

1.1 位相構造

位相空間というのは、集合に位相構造 (開集合系の公理をみたす部分集合の集まりのこと) をセットしたものである:

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ = 集合 X と位相構造 $\mathcal{O}$.

同じ集合にも違う位相構造はたくさん考えうることに注意するのがまずポイントである. 位相空間と言ったときは, どのような位相構造を選んでいるのかちゃんと明示しておかないといけない. ところで開集合系の公理とは次のもの.

定義 1.1 (開集合系の公理) X を集合として, $\mathcal{O}$ を部分集合族とする. $\mathcal{O}$ が次の性質をもつとき, 開集合系の公理をみたすという.

- $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$.
- もし $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ならば, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.
- もし $U_\lambda \in \mathcal{O}$ ($\lambda \in \Lambda$ は添え字) ならば, $\bigcup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{O}$.

このような $\mathcal{O}$ が見つかったとき, $\mathcal{O}$ は X の位相 (構造) であるとか, $\mathcal{O}$ は X に位相を定めるとか, $\mathcal{O}$ によって X に位相を入れるという. 組 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という (ここの「組」というのは, 今集合 X に位相 $\mathcal{O}$ を考えてますよ, という意味と思っておけばよい).

1.2 開集合

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ があったとする. つまり集合 X と位相構造 $\mathcal{O}$ を考えている. $\mathcal{O}$ に属する部分集合のことを開集合とよぶ. ここで注意なのは, 位相構造が定められて初めて開集合か否かが判定される, ということである.

Example 1.2 $X = \{a, b, c\}$ とする. $\mathcal{O}_1 := \{\emptyset, X\}$ (密着位相), $\mathcal{O}_2 := \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ とする. どちらも開集合系の公理をみたすから, X に位相を定めるが, まったく別ものである. たとえば $\{a\}$ は位相構造 $\mathcal{O}_2$ のもとで開集合なのだが, $\mathcal{O}_1$ のもとでは開集合ではない.

1.3 位相の強弱

集合 X に位相 $\mathcal{O}_1$ と位相 $\mathcal{O}_2$ が与えられたとする. もしも $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, つまり $U \subset X$ が $\mathcal{O}_1$ のメンバーであつたら, $\mathcal{O}_2$ のメンバーでもある, ということが成り立つとき, $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ よりも弱い位相であるという. 気持的には, $\mathcal{O}_2$ の方が $\mathcal{O}_1$ よりも X の元をよく見分けられる, という感じである.

Example 1.3 さっきの例だと, 密着位相 $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ よりも弱い. 一般に密着位相是最弱の位相である. 最強の位相は離散位相である.

1.4 位相の生成

集合に位相を作る方法の1つを説明しよう。集合 X と部分集合族 S が用意されているとしよう。この S は開集合系の公理をみたしているかどうかは謎だとする (記号 S と $\mathcal{O}$ の見た目の違いは微妙なので注意して下さい)。今からやりたいことは次の問題を解決することである。

問題 1 S に属する部分集合を開集合とする位相 $\mathcal{O}$ を作ること

つまり $S \subset \mathcal{O}$ となるような位相構造 $\mathcal{O}$ を見つけようというのである。こういう位相構造を1つみつけるのは易しい。例えば離散位相 $P(X)$ においては、すべての部分集合を開集合と呼ぶわけなので当たり前である。しかしこれでは当たり前過ぎていい位相は出来上がらない。上の問題のセッティングは雑すぎるわけである。

そこで次の問題に置き換えてみる。

問題 2 S に属する部分集合を開集合とする「よい位相」 $\mathcal{O}$ を作ること

ここで「よい位相」というのはどういう意味だろうか？さっき離散位相 $P(X)$ を考えたのだが、これは S の情報を全く無視している位相であることは分かると思う。つまり「余計な開集合が多すぎて位相が強すぎる」のである。この観察をもとに上で言っているよい位相とは次のことなんじゃないかと予想できる。

S を含む「よい位相」 = S を含む位相構造のうちで最も弱いもの、
つまりもっとも開集合の量が少ないもの。

この位相のことを S が生成する位相というのだが、格好良く定義しなおしておこう。

定義 1.4 X を集合として、 S を部分集合族とする。 S の生成する位相 $\mathcal{O}_S$ とは次の性質をもつものである。

- $\mathcal{O}_S$ は位相構造である。
- $S \subset \mathcal{O}_S$ である。
- (最小性もしくは最弱性) もし別の位相 $\mathcal{O}$ が $S \subset \mathcal{O}$ をみたしていれば、 $\mathcal{O}_S \subset \mathcal{O}$ 、つまり $\mathcal{O}_S$ の方が弱い。

これだけだと定義しているだけで、本当にあるのかどうか謎なので定理にして示しておく。

定理 1.5 X を集合として、 S を部分集合族とする。 S の生成する位相 $\mathcal{O}_S$ はちゃんと存在する。

証明の中で具体的に構成する。

証明。集合族 $\mathcal{O}_S$ を次の性質をもつ X の部分集合 U の集まりだとする: $U = \emptyset$ か又は、

「各点 $x \in U$ に対して、ある $S_1, \dots, S_n \in S$ が存在して、 $x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subset U$ が成り立つ。」

ここでもポイントは有限個の共通部分だけ許すということである。実際にこの集合族 $\mathcal{O}_S$ が位相になることを示そう。

Claim. $\emptyset, X \in \mathcal{O}_S$.

これは明らかである。

Claim. $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_S \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_S$.

上に書いた条件をみたすことを示す。点 $x \in U_1 \cap U_2$ を取ってくる。すると $x \in U_1$ かつ $x \in U_2$ であり、 $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_S$ だから、ある $S_1, \dots, S_n \in S$ と、ある $T_1, \dots, T_k \in S$ が存在して、

$$x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subset U_1, \quad x \in T_1 \cap \dots \cap T_k \subset U_2$$

をみたす. とくに

$$x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \cap T_1 \cap \cdots \cap T_n \subset U_1 \cap U_2$$

である. $x \in U_1 \cap U_2$ は任意であったから, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_S$.

Claim. $U_\lambda \in \mathcal{O}_S, (\lambda \in \Lambda) \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_S$.

上に書いた条件をみたすことを示す. 点 $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ をとってくる. するとある $\mu \in \Lambda$ について, $x \in U_\mu$ である. $U_\mu \in \mathcal{O}_S$ だから, ある $S_1, \dots, S_n \in S$ が存在して,

$$x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \subset U_\mu$$

がいえる. もちろん $U_\mu \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ であるから,

$$x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

が任意の点 x で言える. よって Claim は正しい.

以上から $\mathcal{O}_S$ が開集合系の公理をみたすことが言えたので, 次に最小性を示す. ある位相 $\mathcal{O}$ が $S \subset \mathcal{O}$ をみたしたとする. このとき次を示したい.

Claim. $\mathcal{O}_S \subset \mathcal{O}$

$U \in \mathcal{O}_S$ とする. $U \in \mathcal{O}$ を示す. そのためには, 「各点 $x \in U$ に対して, ある $U_x \in \mathcal{O}$ が $x \in U_x \subset U$ となるように存在する」ことを示せば十分. なぜかという, これが示せばもちろん

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x$$

であり, 右辺の U_x は $\mathcal{O}$ に入っているのだから, 開集合系の公理より $U \in \mathcal{O}$ が言えるからである.

さてそれでは点 $x \in U$ をとってこよう. すると $U \in \mathcal{O}_S$ だから, ある $S_1, \dots, S_n \in S$ が存在して,

$$x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \subset U$$

がいえる. ここで $U_x := S_1 \cap \cdots \cap S_n$ と書くことにする. すると今度は $S_1, \dots, S_n$ たちが S に属しておりかつ $S \subset \mathcal{O}$ だから, それらは $\mathcal{O}$ にも属している. 部分集合族 $\mathcal{O}$ は開集合系の公理をみたすから, $U_x \in \mathcal{O}$ である.

以上より Claim を示せたから, 最小性も示せた. □

また時間があったら更新するかもしれません. 何か質問があればメールください (home page に書いてある).