要論 A 演習　集合論 (Set Theory) 1

X を集合 (set) とし（**全体集合**ともいう）．A, B をその部分集合 (subset) とする, i.e., $A, B \subset X$.

$$A \cup B \equiv \{x \in X; x \in A \quad \text{or} \quad x \in B\}: \qquad A \text{ と } B \text{ の}\textbf{和集合}\text{ (union)}$$
$$A \cap B \equiv \{x \in X; x \in A \quad \text{and} \quad x \in B\}: \qquad A \text{ と } B \text{ の}\textbf{交わり}\text{ or }\textbf{共通部分}\text{ (intersection)}$$

（特に $A \cap B = \emptyset$ のとき, **直和** $A \cup B = A \sqcup B$ or $A + B$ と表すこともある．）

1. 次が成り立つことを示せ.
   (1) 交換律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
   (2) べき等律: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
   (3) 結合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
   (4) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   (5) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.　(6) $A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$.
   (7) $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.

X の部分集合族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ (a family of subsets) に対し,（ここで J は添数集合と呼ばれる）

$$x \in \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{A_\alpha; \alpha \in J\} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \exists \alpha \in J; x \in A_\alpha$$
$$x \in \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{A_\alpha; \alpha \in J\} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \alpha \in J, x \in A_\alpha$$

（特に $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ $(\alpha \neq \beta)$ のとき, 直和 $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigsqcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ or $\displaystyle\sum_{\alpha \in J} A_\alpha$ と表すこともある．）

集合 A, B に対して $A \setminus B \equiv \{x \in X; x \in A, x \notin B\}$ を**差集合 (difference)** という．特に $X = A$ のとき, $B^c \equiv X \setminus B$ を B の**補集合 (complement)** という.

2. **De Morgan の法則**が成り立つことを示せ.
   (1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
   (2) $\displaystyle\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$, $\displaystyle\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$. (3) $\displaystyle\left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha^c$, $\displaystyle\left(\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha^c$.

集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して
$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ のとき, **単調増加列 (increasing sequence)** といい, $A_n \uparrow$ と表し,
$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ のとき, **単調減少列 (decreasing sequence)** といい, $A_n \downarrow$ と表す．また

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \inf_n \sup A_n \equiv \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k \qquad \textbf{上極限集合 (upper limit set)}$$
$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \sup_n \inf A_n \equiv \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k \qquad \textbf{下極限集合 (lower limit set)}$$

とおき, さらにこの二つが一致するとき $\displaystyle\lim_{n \to \infty} A_n$ と表し, $\{A_n\}$ の**極限集合 (limit set)** という.

3. 次が成り立つことを示せ.
   (1) $\displaystyle\liminf_{n \to \infty} A_n \subset \limsup_{n \to \infty} A_n$.　(2) $\displaystyle(\liminf_{n \to \infty} A_n)^c = \limsup_{n \to \infty} A_n^c$.
   (3) $\displaystyle A_n \uparrow \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.　$\displaystyle A_n \downarrow \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

4. **対称差** $A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ に対して, $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ を示せ.

要論 A 演習　集合論 (Set Theory) 2

X, Y を集合とする. X の各元 x に Y の元 y が一つずつ対応しているとき, その対応を $f : X \to Y; x \to y = f(x)$ と表し, **写像 (mapping)** という. すなわち,

$$f : X \to Y \quad 写像 \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in X, \exists^1 y \in Y; f(x) = y$$

$f(X) = \{f(x); x \in X\} \subset Y$ を f の**値域 (range)** という.

$A \subset X, B \subset Y$ に対し, $f(A) = \{f(x); x \in A\}$, $f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$ をそれぞれ f による A の**像 (image)**, B の **原像** or **逆像 (inverse image)** という. 特に $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ である.

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\overset{\text{def}}{\iff} \exists x \in A; y = f(x) \quad (\text{一般に } x \text{ は一つとは限らない}) \\ x \in f^{-1}(B) &\overset{\text{def}}{\iff} f(x) \in B \end{aligned}$$

以下では $f : X \to Y$ を写像とする.

1. f^{-1} は集合の演算を保つことを確かめよ. すなわち $B, B_1, B_2, \ldots \subset Y$ に対して,
   (1) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
   (2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
   (3) $f^{-1}(\bigcup_n B_n) = \bigcup_n f^{-1}(B_n)$, $f^{-1}(\bigcap_n B_n) = \bigcap_n f^{-1}(B_n)$
   (4) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$
2. f は一般に集合の演算を保つとは限らないことを確かめよ, $A, A_1, A_2, \ldots \subset X$ に対して,
   (1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
   (2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$, だが $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
   (3) $f(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n f(A_n)$, だが $f(\bigcap_n A_n) \subset \bigcap_n f(A_n)$
   (4) 上の (2) の後半で「=」とならない例を挙げよ
3. $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して, 次を示せ
   (1) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$, $f^{-1}(f(A)) \supset A$
   (2) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$, $f^{-1}(f(A) \cap B) \supset A \cap f^{-1}(B)$

写像 $f : X \to Y$ に対して,

f が**単射 (injective)** or **一対一写像 (one to one)** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall y \in f(X), \exists^1 x \in X; y = f(x)$
（このとき逆の $f(X)$ からの対応も写像となり $f^{-1} : f(X) \to X; y \to f^{-1}(y)$ を**逆写像** という.）
f が**全射 (surjective)** or **上への写像 (onto)** $\overset{\text{def}}{\iff} f(X) = Y$, i.e., $\forall y \in Y, \exists x \in X; y = f(x)$
f が**全単射 (bijective)** $\overset{\text{def}}{\iff} f$ が全射かつ単射, i.e., $\forall y \in Y, \exists^1 x \in X; y = f(x)$

特に $f : X \to X; f(x) = x$ を**恒等写像 (identity mapping)** といい, i_X, id_X や単に i, id などと表す.
写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して, その合成写像 $g \circ f : X \to Z$ を $g \circ f(x) = g(f(x))$ で定義する. 明らかに結合律が成り立つ; $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$: これを簡単に $h \circ g \circ f$ と表す.

4. f が単射 $\iff [f(x) = f(y) \Rightarrow x = y] \iff [x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$ を示せ.
5. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ とその合成写像 $g \circ f : X \to Z$ に対し, 次を示せ
   (1) f, g が単射なら $g \circ f$ も単射
   (2) f, g が全射なら $g \circ f$ も全射
   (3) f, g が全単射なら $g \circ f$ も全単射で $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
   (4) $g \circ f$ が単射なら f は単射, さらに f が全射なら g は単射
   (5) $g \circ f$ が全射なら g は全射, さらに g が単射なら f は全射

要論 A 演習　集合論 (Set Theory) 3

$\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ をそれぞれ**自然数**, **整数**, **有理数**, **実数** とする.
(Natural numbers), **(Integers)**, **(Rational numbers)**, **(Real numbers)**

集合 X, Y に対し,

$$X \sim Y \quad \text{対等 (equipotent)} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists f : X \to Y; \quad \text{全単射},$$

このとき X と Y は同じ **濃度 (potency)** （あるいは **基数 (cardinals)**）を持つという.
濃度の表し方は色々あり $|X|$ や $\overline{\overline{X}}$, $\sharp X$, Card X などを用いるが, ここでは最初の表し方を用いることにする. 例えば $|\emptyset| = 0$, $|\{1, 2, \ldots, n\}| = n$ など.

$$X \quad \textbf{有限集合 (finite set)} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |X| < \infty \qquad (|X| = 0 \text{ すなわち } X = \emptyset \text{ も含む})$$
$$X \quad \textbf{無限集合 (infinite set)} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |X| = \infty$$

さらに $X \sim \mathbf{N}$ なら $|X| = \aleph_0$ (aleph zero) と表し, **可算 (countable)** という. 特に, $|X| \leq \aleph_0$（X が有限または可算無限）のとき, **高々可算**であるという. そうでないときは **非可算 (uncountable)** という.

1. $\mathbf{Z}$ は可算, i.e., $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$ を示せ.
2. $\mathbf{Q}$ は可算無限で, $\mathbf{R}$ は非可算であることを次の手順で示せ.
   (1) $\mathbf{N}^2 \equiv \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ は可算
   (2) $\mathbf{Q}^+ \equiv \{x \in \mathbf{Q}; x > 0\}$ も可算
   (3) $\mathbf{Q}$ は可算
   (4) もし $\mathbf{R}$ が可算であるとすると矛盾（ **対角線論法**）

このことから実数の濃度は非可算となり, これを **連続体の濃度 (potency of continuum)** といい, $|\mathbf{R}| = \aleph$ と表す.

3. 次の集合はそれぞれ対等であることを示せ. ただし $-\infty < a < b < \infty$ とする.
   (1) $[0, 1]$ と $[a, b]$,　$[0, 1)$ と $[a, b)$,　$(0, 1]$ と $(a, b]$,　$(0, 1)$ と (a, b)
   (2) $[0, 1]$ と $[0, 1)$,　$[0, 1)$ と $(0, 1)$,　$(0, 1)$ と $(0, 1]$,　$(0, 1]$ と $[0, 1]$
   (3) $\mathbf{R}$ と $(-1, 1)$
   (4) $(0, 1)^2 \equiv (0, 1) \times (0, 1)$ と $(0, 1)$

このことから全ての, 空でない区間は実数と対等, すなわち連続の濃度を持つ. さらに $\mathbf{R}^n$ $(n \in \mathbf{N})$ も連続の濃度を持つことがいえる.

一般に集合 X に対して, その全部分集合族を $\{A; A \subset X\} = 2^X$ と表すことが多い.（教科書によってはこれを定義とすることもある.）これには実は意味がある. 普通, 集合 X から Y への写像の全体を $Y^X \equiv \{f : X \to Y; \quad \text{写像}\}$ と表すのだが, Y が 2 点集合（特に $Y = \{0, 1\}$）のとき $Y^X = (\{0, 1\}^X) = 2^X$ と表す. これは X の各元 x に対して, その元をとるか $(f(x) = 1)$, とらないか $(f(x) = 0)$ を表す写像の全体だと考えることができる. このとき $f(x) = 1$ となる点 x の全体は X の 1 つの部分集合を表す. これにより写像 $f \in 2^X$ と X の部分集合 $A = \{x \in X; f(x) = 1\}$ を同一視することができる. それで上のように表す.

$$|X| \leq |Y| \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists f : X \to Y; \quad \text{単射}$$
$$|X| < |Y| \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |X| \neq |Y| \quad \text{and} \quad |X| \leq |Y|.$$

- **Cantor の定理**: $|X| < |2^X| (= 2^{|X|}$ と表す$)$, 特に $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph$ が成り立つ
- **Schröder-Bernstein の定理**: $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X| \Longrightarrow |X| = |Y|$.
- **連続体仮説**: 「$\aleph_0 < \aleph$ だが, その間の濃度を持つ集合は存在しない」だろうという仮説
  （証明はされてない, が, しかし,「存在しようとしまいと集合論の公理系には何の影響も及ぼさない」もっと正確には「連続体仮説は集合論の ZF 公理系とは独立である」ことが 1963 年, Cohen によって証明されている）

要論 A 演習　集合論 (Set Theory) 4

集合 X, Y に対して, $X \times Y \equiv \{(x,y); x \in X, y \in Y\}$ を X と Y の**直積集合**, または単に**直積 (product)** といい, その元 (x,y) を順序対という．（(x,y) と (y,x) は順序対としては一般に異なり，よって一般に $X \times Y \neq Y \times X$ である）．

さらに一般に集合族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ に対して, $\displaystyle\prod_{\alpha \in J} X_\alpha \equiv \{(x_\alpha)_\alpha; x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in J\}$ と定義する．（この元を $\Pi_\alpha x_\alpha$ と表すこともある.）また $P_\alpha : (x_\beta)_\beta \to x_\alpha$ を $\prod_\beta X_\beta$ から X_α への**射影 (projection)** という.

1. 次が成り立つことを示せ.
   (1) $X \times (Y_1 \cup Y_2) = (X \times Y_1) \cup (X \times Y_2)$　　(2) $X \times (Y_1 \cap Y_2) = (X \times Y_1) \cap (X \times Y_2)$

集合 X において, 任意の 2 つの元 $x, y \in X$ に対して**関係 (relation)** $\sim$ が与えられている　$x \sim y$ か, 与えれていない $x \not\sim y$ が決まっているとする.（もっと一般には X, Y の直積の部分集合 $R \subset X \times Y$ を X と Y の関係という．すなわち $x \sim y \iff (x,y) \in R$ と定義する）．
このとき次の 3 条件をみたすとき, $\sim$ を**同値関係 (equivalence relation)** という:

　[**反射律**] **(reflexive law)**　$x \sim x$
　[**対称律**] **(symmetric law)**　$x \sim y \Longrightarrow y \sim x$
　[**推移律**] **(transitive law)**　$x \sim y, y \sim z \Longrightarrow x \sim z$

さらに同値関係 $\sim$ が与えられたとき, これにより X を分類することができる．すなわち

$$[x] \equiv \{y \in X; x \sim y\}$$　を**同値類 (equivalence class)** という.

2. 上設定のもとで, 次が成り立つことを示せ.
   (1) $x \sim y \Longrightarrow [x] = [y]$　　(2) $x \not\sim y \longrightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

また明らかに $x \in [x]$ であるから, 同値類の全体 $\{[x]\}_{x \in X}$ は X の分割を与える．このとき $\{[x]\}_{x \in X} = X/\sim$ と表し, X の $\sim$ による**商集合 (quotient set)** という

3. 写像 $f : X \to X/\sim$ を $f(x) = [x]$ で定義すると全射となることを示せ.
4. $X = \mathbf{R}$ とし, $\sim \overset{\text{def}}{\iff} x - y \in \mathbf{Z}$ と定義すると, これが同値関係になり, さらに $f : [0,1) \to \mathbf{R}/\sim$; $f(x) = [x]$ が全単射となることを示せ.

集合 X において, 関係 $\preceq$ が次の 3 条件をみたすとき, **順序 (order)** という:

　[**反射律**] **(reflexive law)**　$x \preceq x$
　[**反対称律**] **(anti-symmetric law)**　$x \preceq y, y \preceq x \Longrightarrow y = x$
　[**推移律**] **(transitive law)**　$x \preceq y, y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$

また $x \preceq y$ かつ $x \neq y$ のとき, $x \prec y$ とかく．この $(X, \preceq)$ を**順序集合 (ordered set)** という．さらに $\forall x, y \in X$, $\exists z \in X$; $x \preceq z, y \preceq z$ をみたすとき, **有向集合**という．また $\forall x, y \in X$ に対して $x \preceq y$ か $y \preceq x$ が必ず成立するとき**全順序集合**という．明らかに [全順序 $\Rightarrow$ 有向 $\Rightarrow$ 順序] or [全順序 $\subset$ 有向 $\subset$ 順序] である.
順序集合 $(X, \preceq)$ において $y \in X; x \preceq y (y \preceq x) \Rightarrow x = y$ となるとき $x \in X$ を**極大元**（**極小元**）という．また最大元・最小元, 上界・下界、上限・下限は実数のときと同様に定義される.
任意の空でない部分集合が最小元をもつような順序集合を**整列集合**という.

5. 順序集合だが有向集合でない例, 有向集合だが全順序でない例を挙げよ．また整列集合の例を挙げよ.

順序集合でその任意の全順序集合が上界をもつとき, **帰納的順序集合**という.
次の 4 つの命題は全て同値である：

- **選択公理**　空でない集合族から一つずつ元がとれる（集合の数が可算無限個より多くても）.
- **Zermelo の公準**　空でない互いに素な集合族において, その和の部分集合で各集合との交わりが 1 点集合となるものが存在する.
- **Zorn の補題**　空でない帰納的順序集合は少なくとも一つ極大元をもつ.
- **整列可能定理**　任意の集合は適当な順序によって整列化できる.

要論 A 演習　解析 (Analysis) 1

$\mathbf{R} = (-\infty, \infty) = (-\infty, +\infty)$ を実数 (real numbers) とする. すなわち次の性質をみたすものとする:

(A) **四則演算**　和・差・積・商について閉じていて, 和・積に関して交換律, 結合律, 分配律が成り立つ.
(B) **大小関係**　$a, b \in \mathbf{R}$ に対して $a = b, a < b, a > b$ のいずれか一つのみが成り立ち, 次をみたす：
(1) $a < b,\ b < c \Rightarrow a < c$. (2) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ $(\forall c \in \mathbf{R})$. (3) $a < b \Rightarrow ac < bc$ $(\forall c > 0)$.
(C) **実数の連続性**　上に（下に）有界な集合は, 必ず上限（下限）を持つ:
$E \subset \mathbf{R}; \exists M \in \mathbf{R}; x \le M (\forall x \in E) \Rightarrow \exists \sup E \in \mathbf{R}$
$(E \subset \mathbf{R}; \exists L \in \mathbf{R}; x \ge L (\forall x \in E) \Rightarrow \exists \inf E \in \mathbf{R})$.
上限：$\alpha = \sup E \in \mathbf{R} \iff \forall x \in E, x \le \alpha, \forall \epsilon > 0, \exists x_0 = x_0(\epsilon) \in E; \alpha - \epsilon < x_0 (\le \alpha)$.
下限：$\beta = \inf E \in \mathbf{R} \iff \forall x \in E, x \ge \beta, \forall \epsilon > 0, \exists x_1 = x_1(\epsilon) \in E; \beta + \epsilon > x_1 (\ge \beta)$.

上の実数の性質から, 次が導かれる.

(D) **アルキメデスの原理**　$\mathbf{N}$ は上に有界ではない, i.e., $\forall K > 0, \exists N = N(M) \in \mathbf{N}; N > K$.
(背理法と自然数の定義: $1 \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbf{N}$ による).
(E) **有理数の稠密性**　任意の異なる実数の間には有理数が存在する; $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}; \alpha < \beta, \exists r \in \mathbf{Q}; \alpha < r < \beta$.
((D) より $\exists N \in \mathbf{N}; 1/(\beta - \alpha) < N$, さらに $\exists k \in \mathbf{Z}; k - 1 \le N\alpha < k$. よって $r = k/N$).

注意.　集合 $E \subset \mathbf{R}$ が上に（下に）有界でないとき, $\sup E = \infty$ $(\inf E = -\infty)$ とかく.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列, $\alpha \in \mathbf{R}$ とする. $\{a_n\}$ が α に**収束する**とは

$$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty) \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \overset{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbf{N}; \forall n \ge N, |a_n - \alpha| < \epsilon.$$

また $\{a_n\}$ が**発散する**とは収束しないときをいうが, 特に $\{a_n\}$ が**無限大に発散する**とは

$$a_n \to \infty \quad (n \to \infty) \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall M > 0, \exists N = N(M) \in \mathbf{N}; \forall n \ge N, a_n > M.$$

さらに $\{-a_n\}$ が無限大に発散するとき, $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散する**という;

$$a_n \to -\infty \quad (n \to \infty) \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall L < 0, \exists N = N(L) \in \mathbf{N}; \forall n \ge N, a_n < L.$$

例1． $1/n \to 0$ $(n \to \infty)$ を厳密に上の定義に従って証明せよ. (アルキメデスの原理を用いる).
1. $||x| - |y|| \le |x \pm y| \le |x| + |y|$ を示せ. ただし, $|x| = x \vee (-x) \equiv \max\{x, -x\}$.
2. $a_n \to \alpha$ なら $|a_n| \to |\alpha|$. ($\alpha = \pm\infty$ も許す, ただし $|\pm\infty| = \infty$ とする).
3. $x \ge 0$ なら, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $(1 + x)^n \ge 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ を数学的帰納法で証明せよ.

例2． $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to \infty)$.
証. $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ とおくと, $h_n \ge 0$ で, 上の 3 で $x = h_n$ として, $h_n^2 < 2/(n-1) \to 0$ $(n \to \infty)$.

例3． $a_n \to \alpha$ $(\in \mathbf{R})$ のとき, $(a_1 + \cdots + a_n)/n \to \alpha$.
証. $\forall \epsilon > 0, \exists N; |a_k - \alpha| < \epsilon/2$ $(\forall k > N)$, さらに $\exists N_1 \ge N; \dfrac{1}{N_1}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |a_k - \alpha| < \dfrac{\epsilon}{2}$ より,
$\forall n \ge N_1$ に対し, 和を N で分けて考えれば, $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| \le \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k - \alpha| \le \epsilon$.

4. 上で α が $\pm\infty$ のときも同様な結果が成り立つことを示せ.

要論 A 演習　解析 (Analysis) 2

1. 次の集合はどのような集合か.
   (1) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1,2-\dfrac{1}{n}\right]$　(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[1,1+\dfrac{1}{n}\right]$　(3) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1,1+\dfrac{1}{n}\right)$　(4) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{1}{n},2+\dfrac{1}{n}\right]$
2. 極限を求めよ.
   (1) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$　(2) $\lim_{x\to\infty}[\sqrt{x}]/\sqrt{[x]}$　(3) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+a/x)^x$
   (4) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$　(5) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$
3. ロピタルの定理を用いて極限を求めよ.
   (1) $\lim_{x\to\infty} e^x/x^\alpha$ (α 定数)　(2) $\lim_{x\to\infty}\log x/x^\alpha$ $(\alpha>0)$　(3) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$
   (4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$　(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$ $(a,b>0)$
4. 次の関数を微分せよ.
   (1)$x\log|x|-x$　(2) $\log|\cos x|$
   (3) $\log|x+\sqrt{x^2+1}|$　(4)$\log|(x-1)/(x+1)|$　(5) $\tan^{-1}x$　(6) $\sin^{-1}x$
5. 上の結果を用いて不定積分を求めよ（$a\neq 0$ とする, 積分定数は略してよい）.
   (1) $\int\log|x|dx$　(2) $\int\tan(ax+b)dx$
   (3)$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$　(4) $\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}$　(5) $\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}$　(6) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
6. 次の定義を述べよ. ただし E は $\mathbf{R}$ の部分集合, I は区間を表すものとする.
   (1) $\sup E=\alpha$　(2) $\inf E=\beta$　(3) $f(x)$: I 上の連続関数
7. $\mathbf{R}$ の集合 E に対して, $\sup E=\alpha \Rightarrow \exists\{a_n\}\subset E; a_n\le\alpha, a_n\to\alpha$ を示せ (実は $a_n\uparrow\alpha$ ととれる).
8. 閉区間上の連続関数について (1) **中間値定理**　(2) **最大最小定理** を述べよ.
9. 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で一様連続であることの定義と, その否定命題を述べよ.
10. 区間 I 上の連続関数 $f(x)$ に対して, I が閉区間であれば $f(x)$ は I で一様連続となることを背理法を用いて示せ.
11. $f(x)=\sin(1/x)$ が $(0,1)$ で一様連続でないことを示せ.

---

2. $[x]$: x の整数部分 (**ガウス記号**) $\to x-1<[x]\le x$, $\lim_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x=e$, $\lim_{h\to 0}h^{-1}\log(1+h)=1$, $\lim_{h\to 0}h^{-1}(e^h-1)=1$. **3. ロピタルの定理**： 適当な**条件**のもと $\lim_{x\to a}f(x)/g(x)=\lim_{x\to a}f'(x)/g'(x)$.
(**条件**: f,g が a のある近傍 U で a を除いて可微分かつ $g'\neq 0$, [共に a で連続, $f(a)=g(a)=0$] または $[\lim_{x\to a}g(x)=\infty]$ をみたし, しかも $\exists\lim_{x\to a}f'(x)/g'(x)\in[-\infty,\infty]$ なら成立. また a を $a\pm 0$, $\pm\infty$ にかえても成立. 例えば [f,g は十分大きい x について可微分かつ $g'\neq 0$, $f(\infty)=g(\infty)=0$, i.e., $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$] とする.)
11. $1/x=2n\pi,(1/2+2n)\pi$.

---

1. $[1,2),\{1\},\emptyset,\{2\}$.　**2.** $1/2,1,e^a,e,\log a$.　**3.** $\infty,0,1,1/6,\log(a/b)$.

要論 A 演習　解析 (Analysis) 3

1. 定積分を用いて (1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p}$　(2) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log n)^p}$ は $p>1$ なら収束, $p\leq 1$ なら発散を示せ.
2. 正項級数についての判定法を駆使して収束・発散を調べよ (ただし, $0\leq a<1$, b, p は定数).
   (1) $\displaystyle\sum\frac{\log n}{n^2}$　(2) $\displaystyle\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$　(3) $\displaystyle\sum n^p a^n$　(4) $\displaystyle\sum\left(1-\cos\frac{b}{n}\right)$　(5) $\displaystyle\sum\frac{b^n}{n!}$
3. 交代級数 $\sum(-1)^n/n^p$ $(p>0)$ の絶対収束, 条件収束を調べよ.
4. 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I で関数 $f(x)$ に一様収束することの定義とその否定命題を述べよ.
5. 連続関数列の一様収束極限関数も連続となることを示せ. 即ち,
   区間 I 上の連続関数列 $\{f_n\}$ に対して, $f_n\to f$; I で一様 $\Rightarrow$ f も I で連続.
6. 次の関数列は与えられた区間の上で一様収束するか. ただし, $0<\delta<1$, p は定数.
   (1) $f_n(x)=nx^n$, $[0,\delta]$　(2) $f_n(x)=x^{2n}(1+x^{2n})$, $[0,1]$　(3) $f_n(x)=n^p x e^{-nx^2}$, $(-\infty,\infty)$
7. 整級数の収束半径を求めよ.
   (1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{n!}x^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(1+1/n)^{n^2}x^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}n^2x^{2n}$　(4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(1+1/n)^{n^2}x^{2n}$
8. 定積分の定義を用いて, 次の極限値を求めよ.
   (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$
9. 次の積分の値を求めよ.
   (1) $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　(3) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$　(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$　(5) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
10. 次の広義積分が絶対収束することを確かめよ.
   (1) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)dx$　(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$
11. (1) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ は収束することを示せ.　(2) $\displaystyle\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ は発散することを示せ.

ライプニッツの定理: $a_n\downarrow 0$ なら交代級数 $\sum(-1)^{n-1}a_n$ は収束.

正項級数 $\sum a_n$ の収束・発散の判定法

［**比較**: $a_n\leq Kb_n$ $(n\gg 1)$ なら $\sum b_n$ 収束 $\Rightarrow\sum a_n$ もそう. **コーシー**: $\exists\lim\sqrt[n]{a_n}=r; 0\leq r<1$ なら収束, $1<r\leq\infty$ なら発散. **ダランベール**: $\exists\lim a_{n+1}/a_n=r$; コーシーと同じ. ］

整級数 $\sum a_nx^n$ の収束半径: $R=1/r$ if $r=\lim\sqrt[n]{|a_n|}$ or $\lim|a_{n+1}/a_n|$ exists.

広義積分: 区間 I 上 $g(x)$ は有界 (bdd), $h(x)$ が可積分なら $f(x)=g(x)h(x)$ も可積分.

コーシーの判定条件: $a\to\infty$ のとき $F(a)$ が収束 $\iff\forall\epsilon>0,\exists K>0; |F(a)-F(a')|<\epsilon$ $(\forall a,a'>K)$.

---

3. $p>1\Rightarrow$ 絶対, $0<p\leq 1\Rightarrow$ 条件. **6.** $f_n(x)\leq n\delta^n\to 0$, $f_n(x)\to f(x)=1/2$ $(x=1)$, $=0$ $(x\in[0,1))$, $p>1/2\Rightarrow$ 一様, $p\leq 1/2\Rightarrow$ 一様でない. **7.** $1/e$, $1/e$, 1, $1/\sqrt{e}$. **8.** $2/3$, $\log 2$, $\log(1+\sqrt{2})$.

9. -1, π, 2, π, $\pi/4$. **10.** 有界関数 (1) $\sqrt{x/\sin x}$ on $(0,\pi/2]$　(2) $x^\alpha\log(\sin x)$ $(0<\alpha<1)$ on $(0,\pi/2)$ (3) $x^\alpha e^{-x^2}$ $(\alpha>1)$ on $[0,\infty)$

11. (1) 部分積分を用いて $\displaystyle\left|\int_a^{a'}\frac{\sin x}{x}dx\right|\to 0$ $(a,a'\to\infty)$ を示す. (2) $\displaystyle\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\geq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ を示す.

要論 A 演習　解析 (Analysis) 4

1. 次の極限値を求めよ.
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{1/x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$
(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x}$
2. 関数 $f(x), g(x)$ がともに連続なら, $(f\vee g)(x)\equiv\max\{f(x),g(x)\}, (f\wedge g)(x)\equiv\min\{f(x),g(x)\}$ も連続であることを確かめよ.
3. 区間 I 上で関数 $f(x), g(x)$ がともに連続で, 各 $x\in\mathbf{Q}\cap I$ に対して $f(x)=g(x)$ ならば I 上 $f=g$ となることを示せ.
4. 原点に関して対称な区間で定義された関数 $f(x)$ は $f(x)=g(x)+h(x)$, $g(x)$ 偶関数, $h(x)$ 奇関数の形に一意的に表されることを示せ.
　更に $[-\pi,\pi]$ で定義された関数 $f(x)=2\sin x\ (0\le x\le\pi), =0\ (-\pi\le x\le 0)$ に対して上の g, h を求め, なるべく簡単な式で表せ.
5. 次の極限値を求めよ.
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{e^{\sin x}-e}{\log\sin x}$
(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\log x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$　(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$　$(a,b>0)$
(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$
6. $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なら
$$\lim_{h,k\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a-k)}{h+k}=f'(a)$$
7. $f(x)$ が $x=a$ の近くで C^2 級なら
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$
8. $f(x)$ が区間 I で C^n 級のとき, 任意の $x, a\in I$ に対して,
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$
9. $[a,b]$ で $f(x), g(x)$ は連続, $g(x)\ge 0$ とすると, 次をみたす定数 c が存在することを示せ:
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx\ (a\le c\le b).$$
10. 次の広義積分が収束することを確かめよ.
(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{1-x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|\log x|}}$　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(\cos\theta)^p}$ $(p<1)$　(4) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha e^{-x^2}dx$ $(\alpha>0)$

---

1. $2/3, e, 1/e, 1/2, -1/2, 0$. **2.** $a\vee b, a\wedge b$ を和と差, 絶対値を用いて表す. **4.** $g(x), h(x)$ は $f(x), f(-x)$ の和と差を用いて表される. **5.** $1/3, -1/3, 1/6, e, -2, -e/2, \sqrt{ab}, 1/2, 0$.
7. テイラーの定理. **8.** 部分積分. **9.** 中間値の定理

要論 A 演習　前期試験

担当： 平場　誠示

平成 10 年 6 月 30 日　実施

X, Y, Z を集合とする.

1. 写像 $f : X \to Y; x \to y = f(x)$ と集合 $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して,
   $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ を示せ
   (特に $A = X$ なら $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$ が成り立つ).
2. 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ とその合成写像 $g \circ f : X \to Z$ に対し,
   $g \circ f$ が単射なら f は単射, さらに f が全射なら g は単射となることを示せ.
3. 数列 $\{a_n\}$ に対して $a_n \to \infty$ のとき, $(a_1 + \cdots + a_n)/n \to \infty$ を示せ.
4. 次の極限を求めよ.
   (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \log x$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^{\sin x}$
5. 区間 I 上の連続関数 $f(x)$ に対して, I が有界閉区間であれば $f(x)$ は I で一様連続となることを背理法を用いて示せ.
6. $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ を示し，これを用いて $\displaystyle\sum_n \left(1 - \cos\frac{b}{n}\right)$ が収束することを示せ（ただし b は定数である）.

アンケート

1. 大学に入る前、大学に行こうと思った理由、特に数学を選んだ理由
   （数学でこれが勉強したかったからというのがあればそれも）

2. 実際に入ってみて、今、思うこと、やりたいことは？
   また卒業後の進路希望は？(就職？　進学？　漠然とでも）

3. 授業の感想・希望・要望、大学数学に対しての感想など自由に！

要論 A 演習　解析 II (Analysis II) 0

定義　連結な開集合 D を**領域**という．ただし集合の任意の 2 点を結ぶ集合内の曲線が存在するとき，**弧状連結**であるという．

定義 関数 f が領域 D 上で C^n **級**であるとは D 上で n 階までの全ての偏微分を持ち，それらがすべて D 上で連続であるときをいう．

定理　**Taylor の定理**

関数 $f(x_1, x_2)$ が領域 D 上で C^n 級（$n \geq 1$）とし，線分 $\{(a_1 + h_1 t, a_2 + h_2 t) : 0 \leq t \leq 1\}$ が D に含まれるとする．(ただし $(h_1, h_2) \neq (0,0)$）このとき $0 < \exists\theta < 1$;

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(h_1\partial_1 + h_2\partial_2)^k f(a_1, a_2) + \frac{1}{n!}(h_1\partial_1 + h_2\partial_2)^n f(a_1 + h_1\theta, a_2 + h_2\theta),$$

ここで $\partial_i = \partial/\partial x_i$ とする．

証明は $z(t) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2)$ に 1 変数の Taylor の定理を用いてから $t = 0$ を代入すれば良い．ただしそこで次を用いる：

$$\begin{aligned} z^{(k)}(t) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} h_1^j h_2^{k-j} \frac{\partial^k}{\partial x_1^j \partial x_2^{k-j}} f(a_1 + h_1 t, a_2 + h_2 t) \\ &= (h_1\partial_1 + h_2\partial_2)^k f(a_1 + h_1 t, a_2 + h_2 t) \quad \text{と書き表す．} \end{aligned}$$

定理 $f(x, y)$ は点 $P_0(x_0, y_0)$ の近くで C^2 級とする．$\nabla f(P_0) = 0$ のとき, $D \equiv (f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy})(P_0)$ に対し,

(a) $D < 0, f_{xx}(P_0) > 0 \Rightarrow f(P_0)$ 極小値,

(b) $D < 0, f_{xx}(P_0) < 0 \Rightarrow f(P_0)$ 極大値,

(c) $D > 0 \Rightarrow f(P_0)$ 極値でない

証明は $|h|, |k|$ 十分小で同時に 0 でなければ Taylor の定理より $0 < \exists\theta < 1$;

$$\begin{aligned} \Delta f &\equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ &= (h\partial_x + k\partial_y)^2 f(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta) \\ &= (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta) \end{aligned}$$

と表せるから (a) の条件のもと，$\Delta f > 0$, (b) のもとで $\Delta f < 0$ がすぐに分かる．(c) のもとでは, 正にも負にもなることが分かる．

定理　**条件付き極値 (ラグランジュの乗数法)**

$\varphi(x, y, z), f(x, y, z)$: C^1 級とする．点 $P(x, y, z)$; $\varphi(x, y, z) = 0$, f: 点 $P = P_0$ で広義の極値なら $\nabla\varphi(P_0) = 0$ or $\exists\lambda$ 定数; $\nabla f(P_0) = \lambda\nabla\varphi(P_0)$

証明は $\nabla\varphi(P_0) \neq 0$ で $\varphi_z(P_0) \neq 0$ として，陰関数定理より，$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ の近傍で $\exists z = z(x, y)$: C^1 級; $\varphi(x, y, z) = 0$. $f(P_0)$ が広義の極値より，$u(x, y) \equiv f(x, y, z(x, y))$ は (x_0, y_0) で広義の極値をとる．(x_0, y_0) で，$\nabla u = 0$ を書き下して，$z_x = -\varphi_x/\varphi_z, z_y = -\varphi_y/\varphi_z$ を代入して,

$$f_x = \frac{f_z}{\varphi_z}\varphi_x,\ f_y = \frac{f_z}{\varphi_z}\varphi_y, \quad \text{また} \quad f_z = \frac{f_z}{\varphi_z}\varphi_z$$

をえるから，$\lambda \equiv f_z/\varphi_z(P_0)$ とおけば良い．

要論 A 演習　解析 II (Analysis II) 1

1. 次の関数 $f(x,y)$ が $(0,0)$ で極限値を持つかどうか調べよ.
   $(1)(x^2+2y^2)/\sqrt{x^2+y^2}$　$(2)x^2y/(x^4+y^2)$
2. (1) $f(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$ (2) $f(x,y)=x/\sqrt{x^2+y^2}$ ($f(0,0)=0$) について $(0,0)$ で連続か？また $f_x(0,0), f_y(0,0)=$？　さらに $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f_x(x,y), f_y(x,y)=$？　もし存在するなら求めよ.
3. $z=f(x,y)$ が C^2 級のとき, $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと次が成り立つことを示せ.
   $(1)z_x^2+z_y^2=z_r^2+z_\theta^2/r^2$　$(2)z_{xx}+z_{yy}=z_{rr}+z_r/r+z_{\theta\theta}/r^2$
4. (1) 空間に n 個の点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ があるとき, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\overline{P_iP}^2$ を最小にする点 P を求めよ.
   (2) 定円に内接する三角形で面積最大のものは正三角形であることを示せ.
5. 次の関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.
   (1) $xy(x^2+y^2-1)$　$(2)xy+a/x+a/y$ $(a>0)$　$(3)(ax^2+by^2)\exp[-(x^2+y^2)]$ $(a>b>0)$
6. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ のもとで, $x+y+z$ の最大, 最小を求めよ.
7. $x+y+z=a$ $(x,y,z>0)$ のもとで, $x^py^qz^r$ の最大値を求めよ. ($p,q,r>0$ とする.)

補充問題

8. 関数 $f(x,y)=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\sin\dfrac{1}{x}\sin y$　($xy=0$ のとき, $f(x,y)=0$ とする.) が $(0,0)$ で極限値を持つかどうか調べよ.
9. $\phi(r)$: r の C^2 関数, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, f(x,y,z)=\phi(r)$ とするとき $\triangle f\equiv f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$ を ϕ で表せ.
10. $x>0$ で定義された C^1 関数 $z=z(x,y)$ が y/x のみによるための条件は $xz_x+yz_y=0$ であることを示せ.
11. C^1 関数 $z=z(x,y)$ が変換 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ によって r だけの関数となるための条件は $yz_x=xz_y$ であることを示せ.
12. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ を求めよ.
13. 周の長さが一定 $(=2s)$ の三角形のうち, 面積最大のものは正三角形であることを示せ.

---

1. 極座標　**3.** 右辺 =?　**4.** C^1 関数 f: 点 P_0 で最大 (小) 値 ⇒ 点 P_0 で極値 ⇒ $\nabla f(P_0)=0$ ($\nabla f=\mathrm{grad} f\equiv(f_x,f_y,f_z)$) (2) ヘロンの公式 $S=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ $(2s=x+y+z)$ **5.** $D\equiv f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}$ で判別 **6, 7. 条件付き極値 (ラグランジュの乗数法)**
9. $\phi', \phi''=?$　**10.** $u=y/x$ として $\varphi(x,u)\equiv z(x,xu)$ で $\varphi_x=0$
13. 中心角 $x,y,z; x+y+z=2\pi$

---

1. 0, なし　**2.** (1) 連続, 0, 0　(2) ×, なし, 0 **4.** (1) $P=\sum P_i/n$　**5.** (1) $\pm(1/2,-1/2)$ で極大値 $1/8, \pm(1/2,1/2)$ で極小値 $-1/8$ (2) $x=y=\sqrt[3]{a}$ で極小値 $3\sqrt[3]{a^2}$　(3) $(\pm1,0)$ で極大値 $a/e, (0,0)$ で極小値 0　**6.** $\pm(a^2/l, b^2/l, c^2/l)$ $(l=\sqrt{a^2+b^2+c^2})$ で $\pm l$　**7.** $(pa/m, qa/m, ra/m)$ $(m=p+q+r)$ で $p^pq^qr^r(a/m)^m$ **8.** 0　**9.** $\phi''(r)+2\phi'(r)/r$　**12.** $z_x=-\dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{x}{z}, z_{xx}=\dfrac{c^4}{a^2b^2}\dfrac{y^2-b^2}{z^3}, z_{xy}=-\dfrac{c^4}{a^2b^2}\dfrac{xy}{z^3}$

要論 A 演習　解析 II (Analysis II) 2

例題 1 $\displaystyle\iint_D (x+y)^\alpha dxdy$ $(\alpha>0)$ の値を D が次の場合に求めよ. (1) $0\le x,y\le 1$　(2) $0\le y\le x\le 1$

1. 次の重積分の値を求めよ（括弧内は D を表す）.
(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$ $(0\le y\le \sqrt{1-x^2})$　(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)dxdy$ $(0\le x,y,x+y\le \frac{\pi}{2})$

2. 次の累次積分の積分順序を変えよ（$a>0, 0<\alpha<\beta$）.
(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx\int_0^{e^x} f(x,y)dy$　(2) $\displaystyle\int_0^a dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy$　(3) $\displaystyle\int_a^{2a} dy\int_{y-a}^{y+a} f(x,y)dx$

例題 2 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$ $(D:0\le y<x\le 1, 0<\alpha<1)$ を確かめよ.

3. 次の広義積分の値を求めよ.
(1) $\displaystyle\iint_{x,y\ge 0}\frac{dxdy}{(1+x+y)^\alpha}$ $(\alpha>2)$　(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(D:0\le y\le x\le 1, x>0)$

例題 3 一次変換: $x=au+bv, y=cu+dv\to dxdy=|ad-bc|dudv$,

極座標変換: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta\to dxdy=rdrd\theta$ を用いて次を確かめよ.

(1) $\displaystyle\iint_{x,y\ge 0}\frac{|x-y|}{(1+x+y)^\alpha}dxdy=\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}$ $(\alpha>3)$

(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{2\pi}{3}a^3$ $(a>0)$

4. 次の重積分の値を求めよ（但し $a,b,c>0$）.
(1) $\displaystyle\iint_{x,y\ge 0}(ax+by+c)^{-\alpha}$ $(\alpha>2)$　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1}\log(x^2+y^2)dxdy$

例題 4 極座標（球座標）変換: $x=r\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\sin\phi, z=r\cos\theta\to dxdydz=r^2|\sin\theta|drd\theta d\phi$

$\displaystyle\iiint_V x^2dxdydz=\frac{4\pi}{15}a^5$ $(V:x^2+y^2+z^2\le a^2)$ を確かめよ.

5. 次の三重積分を求めよ（但し $a>0, \alpha>-3/2$）.
(1) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{x+y}e^{x+y-z}dz$　(2) $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2+z^2)^\alpha dxdydz$ $(V:x^2+y^2+z^2\le a^2)$

補充問題

6. 次の重積分の値を求めよ（括弧内は D を表す）.
(1) $\displaystyle\iint_D e^{y/x}dxdy$ $(0<x\le 1, 0\le y\le x)$　(2) $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\le 1}x^2y^2dxdy$

7. 次の累次積分の積分順序を変えよ（$a>0, 0<\alpha<\beta$）.
(1) $\displaystyle\int_a^{2a}dy\int_{y-a}^{y+a}f(x,y)dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 dx\int_{x^2}^{2+x}f(x,y)dy$

8. 広義積分 $\displaystyle\iint_D e^{-xy}dxdy$ $(D:x\ge 0, 0<a\le y\le b)$ の値を求めよ.

9. 次の重積分の値を求めよ（但し $a,b,c>0$）.
(1) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1}(a^2x^2+b^2y^2)dxdy$　(2) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ $(D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1)$

10. 三重積分 $\displaystyle\iiint_V (x+y+z)dxdydz$ $(V:x^2+y^2+z^2\le a^2, z\ge 0)$ を求めよ.

変数変換 $[(x,y)\in D\leftrightarrow (u,v)\in E]$　$x=x(u,v), y=y(u,v)$: C^1 級, Jacobian $\partial(x,y)/\partial(u,v)\ne 0$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_E f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv,\quad 但し\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\end{pmatrix}$$

---

1. $2/15, 1$　**2**. 領域の図を描いてみれば良い, いくつかの積分の和になる

3. $1/\{(\alpha-1)(\alpha-2)\}, \log(1+\sqrt{2})$　**4**. $1/\{ab(\alpha-1)(\alpha-2)c^{\alpha-2}\}, -\pi$　**5**. $e(e-2)/2, 4\pi a^{2\alpha+3}/(2\alpha+3)$

6. $(e-1)/2, 1/45$　**8**. $\log(b/a)$　**9**. $\pi(a^2+b^2)/4, \pi ab(a^2+b^2)/4$　**10**. $\pi a^4/4$

要論 A 演習　集合と位相　Set and Topology

２年生の講義で「位相 (topology)」というものを勉強するが, 簡単にいってこれはある集合で点と点との近さを測るための最も抽象的な構造といえる. それが「近傍 (neighborhood)」や「開集合 (open set)」と呼ばれるものの集まりで, それが与えられたとき, 位相が与えられたという. もう少しその概念を強くして, 「距離 (metric)」と呼ばれるものを与えて, それによって開集合を定義し, 位相を与えることもできる.

定義 ある集合 X に対し, そのある部分集合族 $\mathcal{O}$ が X の**開集合族**であるとは

(O1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.

(O2) $G_1, G_2 \in \mathcal{O} \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{O}$.

(O3) $G_\alpha \in \mathcal{O}\ (\alpha \in A) \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{O}$.

をみたすときをいう. 最後の添字集合 A の濃度はいくら大きくても良い（可算である必要はない）.

この開集合族を**位相構造**, または単に**位相**という. また $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間 (topology space)** という.

定義 集合 X に対し, 写像 $d : X \times X \to [0, +\infty]; (x, y) \to d(x, y)$ が次の性質をみたすとき**距離**または**距離関数**という.

(D1) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \iff x = y$ （分離性）

(D2) $d(x, y) = d(y, x)$ （対称性）

(D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ （三角不等式）

このとき (X, d) を**距離空間 (metric space)** という.

$\mathbf{R}^2$ において, 点 $x = (x_1, x_2)$ の大きさを $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ で定義し, $d(x, y) = |x - y|$ とおくとこれが距離となる. さらに $\delta > 0$ に対し, $U_\delta(x) \equiv \{y \in \mathbf{R}^2; d(x, y) < \delta\}$ を x の **δ-近傍**という. よくこの δ を省略して, 単に $U(x)$ を x の近傍という.

点 $x = (x_1, x_2)$ がある集合 S の

内点：$\exists U(x)$; x の近傍, $U(x) \subset S$,

外点： $\exists U(x)$; x の近傍, $U(x) \cap S = \emptyset$,

境界点： $\forall U(x)$; x の近傍, $U(x) \cap S \neq \emptyset$, かつ $U(x) \cap S^c \neq \emptyset$.

内点は S に含まれるし, 外点は含まれない. 境界点は含まれることもあるし, 含まれないこともある.

S が内点のみからなる（境界点を含まない）とき**開集合**, 境界点をすべて含むとき**閉集合 (closed set)** という. また境界点の全体を ∂S で表し, **境界 (boundary)** という. 明らかに開集合の補集合は閉集合であり, その逆も成り立つ（任意の集合 S に対し, $\partial(S^c) = \partial S$ による）.

1. この開集合族は上の位相の定義で述べた開集合族の条件をみたしていることを確かめよ.
2. 次の集合は開集合か閉集合か答えよ.
   (1) $\{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 < 1\}$　(2) $\{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
   (3) $\{(x_1, x_2); x_1 x_2 > 0\}$　(4) $\{(x_1, x_2); x_1, x_2 \in \mathbf{Q}\}$
3. 任意の集合 S に対して, ∂S は閉集合であることを示せ.

点 x の任意の近傍が S の点を無限個含むとき x を S の**集積点**, また境界点で集積点でない点を S の **孤立点**という.

4. 問 2 の各集合についてその集積点をすべて求めよ.
5. 「S が閉集合 $\iff$ S の集積点がすべて S に属する」を示せ.
6. 「集合 S が閉集合 $\iff$ S の任意の収束列の極限が常に S に属する」を示せ.

要論 A 演習　後期試験問題

平成 11 年 1 月 19 日実施　　担当：平場

1. $F(y)$ を $\mathbf{R}$ 上の関数である定数 $C>0$ に対して $|F(y)|\le C|y|$ $(\forall y\in\mathbf{R})$ をみたすとする．$f_0(x)$ を $[0,1]$ 上の連続関数として $n=0,1,2,\dots$ に対し，

$$f_{n+1}(x)=\int_0^x F(f_n(u))du \quad (x\in[0,1])$$

と定義する．このとき

$$|f_n(x)|\le\left(\max_x|f_0(x)|\right)\frac{C^n|x|^n}{n!}\quad (x\in[0,1])$$

を示し，これから $f_n\rightrightarrows 0$ on $[0,1]$ を導け．

2. 区間 $[a,b]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が一様収束するならその積分の極限と極限関数の積分が一致することを示せ。すなわち

$$f_n\rightrightarrows f\quad\text{on }[a,b]\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

3. 一般に有界区間上の連続関数列が各点収束していても積分が収束するとは限らないがその例をあげよ。すなわち

$$f_n(x)\to f(x)\quad(\forall x),\quad\text{but}\quad\int_a^b f_n(x)dx\not\to\int_a^b f(x)dx.$$

ヒント　グラフが山，折れ線，$[0,1]$ 上で $f_n\ge 0$; $f_n(x)\to 0$, $\int_0^1 f_n(x)dx=1$ なるものをつくれ．

このことから積分と極限の交換可能のための一つの十分条件が一様収束性であることが分かる。実際にはもう少し弱い条件で成り立ち，それは 3 年生で習う「ルベーグの収束定理」として知られている。

4. $\mathbf{R}^2$ において，点 $x=(x_1,x_2)$ が集合 S の

内点：$\exists U(x)$; x の近傍，$U(x)\subset S$,

外点：$\exists U(x)$; x の近傍，$U(x)\cap S=\emptyset$,

境界点：$\forall U(x)$; x の近傍，$U(x)\cap S\ne\emptyset$, かつ $U(x)\cap S^c\ne\emptyset$.

S が内点のみからなる（境界点を含まない）とき**開集合**，また補集合が開集合であるとき**閉集合**という．全体集合と空集合は開かつ閉集合であるとする．(尚，これらの定義は何次元でも同じである.)

(a) 「集合 S が閉集合 $\iff$ S の任意の収束列の極限が常に S に属する」を示せ．

(b) $f(x)$ を $\mathbf{R}^2$ 上の連続関数とする．C を $\mathbf{R}$ の中の閉集合とすると $f^{-1}(C)=\{x\in\mathbf{R}^2; f(x)\in C\}$ も閉集合となることを上の命題を用いて示せ．

5. 一般に実正方行列 A に対して，$\exists x\ne 0$ （ベクトル），$\lambda\in\mathbf{C}$ （定数）; $Ax=\lambda x$ のとき x を**固有ベクトル (eigen vector)**, λ を**固有値 (eigen value)** という．一般に実対称行列については，固有値はすべて実数となることが知られている．

今 3×3-実対称行列 $A=(a_{ij})$ と 3 次元縦ベクトル $x={}^t(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ に対して（^{t} は転置を表す）

$$\begin{aligned} f(x) &= {}^t xAx=\sum_{i,j}x_i a_{ij}x_j \\ &= a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1 \end{aligned}$$

とおく．このとき f が $|x|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ という条件のもとで f の最大（最小）値と，A の最大（最小）固有値が一致することをラグランジュの乗数法を用いて説明せよ．