

Basic Mathematics

基礎数学

担当： 平場 誠示

平成 16 年 4 月 16 日 (金) 3-4 限 (10:40-12:10) より 通年

参考書 内田 伏一 著「集合と位相」 裳華房

目次

0	数とは何か? その定義と由来	1
1	集合の表し方	2
2	集合演算	2
3	写像 (mapping)	5
4	ε - δ 論法 (ε - δ Logic)	6
5	濃度 (Potency)	9
6	同値関係と順序 (Equivalence Relation and Order)	13
7	選択公理と Zorn の補題 (Axiom of Choice, Zorn's Lemma)	14
8	集合と位相 (Set and Topology)	17

0 数とは何か？ その定義と由来

[自然数 \mathbf{N} 、整数 \mathbf{Z} 、有理数 \mathbf{Q} 、無理数 \mathbf{Q}^c 、実数 \mathbf{R} 、複素数 \mathbf{C}]

例えば自然数とは何か？

1, 2, 3, ... という、物を数えたりするときに用いる使う自然な数、natural numbers のことで、その全体は英語の頭文字を取って、 \mathbf{N} と表す。しかしこれのもっとちゃんとした定義は何か？

定義 Def.(Definition) \mathbf{N} が自然数の全体であるとは

(1) $1 \in \mathbf{N}$, (2) $n \in \mathbf{N} \implies n+1 \in \mathbf{N}$, (3) \mathbf{N} は (1), (2) を満たす最小の集合である

但し, $n \in \mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{\iff} n$ は \mathbf{N} の元・要素 (element). 否定は $n \notin \mathbf{N}$ と表す.

(それぞれ $\mathbf{N} \ni n$, $\mathbf{N} \not\ni n$ と書いても良い. 記号 \in は element の頭文字 e, E をとって記号化したもの.)

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\} = \{n; n \text{ は自然数}\}$$

数が数えられるようになると今度は足し算・引き算をするようになる。ところが引き算で、自然数のままだと、小さい数から大きい数を引くということが出来ない!! そこで 0 と自然数にマイナスをつけたものを加えて、整数 (integers) \mathbf{Z} (独: Ganz Zahlen の \mathbf{Z}) というものを作り出した。

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} = (-\mathbf{N}) \cup \{0\} \cup \mathbf{N}$$

ここで $A \cup B$ は A と B との和集合; $x \in A \cup B \stackrel{\text{def}}{\iff} x \in A \text{ or } x \in B$.

さらに掛け算・割算を考えると、今度は割算で、割り切れないものが山ほどある! これはやはり気持ち悪い! そこで割算が出来るように、分数¹, 正確には有理数 (rational numbers)² \mathbf{Q} を作った. (恐らく、実数が \mathbf{R} なので、その前ということで \mathbf{Q} に!?)

$$\mathbf{Q} := \mathbf{Z}/\mathbf{N} = \{r; r = m/n, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\} = \{m/n; m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$$

ここまでで一見、普通の計算 (四則演算) は出来るようになった。所が、それ以外にも、円周率 π や $\sqrt{2}$ などの『数』がある。これらは理由は分らないが、兎に角、存在する。そこでそれらを無理数と呼び、有理数と共に、その全体を実数 (real numbers) \mathbf{R} と呼ぼうと決めた。これで普通の計算には十分であろうと! しかし、方程式で $x^2 = -1$ の解が実数では表せない。ならば、その解の一つを $i = \sqrt{-1}$ と表して、実際には存在しない人工的な数だから虚数単位と名付けた。それと実数を組み合わせて、複素数 (complex numbers) \mathbf{C} を作った。

$$\mathbf{C} = \{z; z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}\}$$

問 0.1 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ.

背理法を用いる. 背理法とは, $[A \implies B]$ を示すのに, A かつ $[B \text{ ではない}]$ と仮定して, 矛盾を導く論法. 本質的に対偶 $[B \text{ でない} \implies A \text{ でない}]$ を示すのと同じこと.

(偶数)² = 偶数, (奇数)² = 奇数 を用いる.

¹分数というのはいい加減な言葉で, $1/\pi$, $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ も分数であるが, 整数/整数の意味で使うこともある.

²本当は有比数と訳す予定が, 手違いでこうなったらしい.

1 集合の表し方

Keywords 集合、元・要素、外延的定義（列挙法）、内包的定義、空集合、有限・無限集合、包含関係、部分集合、真部分集合、巾集合、集合族

集合 (set) A とはある「もの」の集まりで、その「もの」を a などで表し、
 $[a \in A \stackrel{\text{def}}{\iff} a \text{ は } A \text{ の元} \cdot \text{要素 (element). あるいは } a \text{ は } A \text{ に属する (含まれる)}].$
 ($A \ni a$ と表す。ただこのときには A は a を含む、元として持つというべきだが.)

否定は $a \notin A$ or $A \not\ni a$ と表す。

厳密には、元が属しているかどうかハッキリしている場合に集合という。

集合の表し方としては

$$A = \{2, 3, 5\} = \{a; a = 2, 3, 5\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{b; b \text{ は正の偶数}\}$$

という、外延的表記（列挙法）と内包的表記がある。

また何も元を持たないものも一つの集合として、空集合 (empty set) といい、記号 \emptyset で表す。元を有限個しか持たない集合と空集合を併せて有限集合 (finite set) という; $\#A < \infty$. そうでない集合を無限集合 (infinite set) という; $\#A = \infty$. ($\#$ は集合の点の個数を表す記号.)

ある集合 A, B に対し、 A が B に含まれる or A は B の部分集合

$$A \subset B \stackrel{\text{def}}{\iff} [x \in A \Rightarrow x \in B] \quad \text{厳密には } \forall x \in A, x \in B$$

最後のは、厳密な定義で、「 A の任意の元に対し、いつでも B の元となる」と読む。(「 \forall 」は任意記号という。全く同じことだが、 $B \supset A$ と書く。ただこのときは B は A を含むというべき.)
 否定は次のようになる。

$$A \not\subset B \iff \exists x_0 \in A; x_0 \in B$$

両方の包含関係が成り立つとき等しいという, i.e.,

$$A = B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subset B, A \supset B \iff [x \in A \Leftrightarrow x \in B].$$

また $A \subsetneq B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subset B$ and $A \neq B$ で、 A は B の真部分集合。

集合 X の部分集合からなる集合を 集合族 という。特に、部分集合全体からなる集合を 全部分集合族、または単に巾 (ベキ) 集合 (power set) といい、 2^X or $\mathcal{P}(X)$ と表す。

2 集合演算

和・積・差・補集合・直積集合 (2 つ, 3 つの場合、 n 個の場合、可算個の場合、濃度の後に? 一般の場合)

X を集合 (set) とし (全体集合ともいう)。 A, B をその部分集合 (subset) とする, i.e., $A, B \subset X$.

$A \cup B := \{x \in X; x \in A \text{ or } x \in B\}$: A と B の和集合 (union)

$A \cap B := \{x \in X; x \in A \text{ and } x \in B\}$: A と B の交わり or 共通部分 (intersection)

特に $A \cap B = \emptyset$ のとき、互いに素 (disjoint) であるといい、その和 $A \cup B$ を素な和 (素和) という。

- 次が成り立つ (べん図を用いて確かめよ).

- (1) 交換律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
 (2) べき等律: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
 (3) 結合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
 (4) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 (5) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$. (6) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
 (7) $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.

1. 上の分配律が成り立つことを定義に従って証明せよ.

X の部分集合族 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ (a family of subsets) に対し, 和と交わりを次で定義する.

$$\cdot x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists n \geq 1; x \in A_n \quad (n \text{ は } x \text{ に依存}) \quad \cdot x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall n \geq 1, x \in A_n.$$

集合 A, B に対して $A^c := \{x \in X; x \notin A\}$ を A の X における補集合 (complement) という.
 また $A \setminus B := A \cap B^c = \{x \in X; x \in A, x \notin B\}$ を差集合 (difference) という.

2. 次の De Morgan の法則が成り立つことを示せ.

$$(1) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (2) \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c, \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

3. $f = f(x)$, $g = g(x)$ を \mathbf{R} 上の関数として, 次の集合の補集合を求めよ. また
 $f \vee g := \max\{f, g\}$, $f \wedge g := \min\{f, g\}$ を用いて 1 つの集合で表せ.

$$(1) \{x \in \mathbf{R}; f(x) \leq a\} \cup \{x \in \mathbf{R}; g(x) \leq a\} \quad (2) \{x \in \mathbf{R}; f(x) \leq a\} \cap \{x \in \mathbf{R}; g(x) \leq a\}$$

4. 対称差 (symmetric difference) $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ に対し, (1) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (2) $A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$ を示せ.

集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$A_1 \subset A_2 \subset \dots$ のとき, 単調増加列 (increasing sequence) といい, $A_n \uparrow$ と表し (極限は $\bigcup A_n$),
 $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ のとき, 単調減少列 (decreasing sequence) といい, $A_n \downarrow$ と表す (極限は $\bigcap A_n$).

5. 次の集合を 1 つの区間で表せ.

$$(1) \bigcup_{n \geq 1} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right) \quad (2) \bigcup_{n \geq 1} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \quad (3) \bigcap_{n \geq 1} \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right] \quad (4) \bigcap_{n \geq 1} \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

上の問の答えは (1) (2) 共に $[0, 1)$, (3) (4) 共に $[0, 1]$ となるが, これを示すことはできるだろうか?

さらに宿題として,

[HW] 次の集合を 1 つの区間で表せ.

$$(1) \bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right) \quad (2) \bigcap_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

また

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \inf_n \sup_{k \geq n} A_k && \text{上極限集合 (upper limit set)} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \sup_n \inf_{k \geq n} A_k && \text{下極限集合 (lower limit set)} \end{aligned}$$

とおき, さらにこの二つが一致するとき $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ と表し, $\{A_n\}$ の極限集合 (limit set) という.

6. 次の成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned} (1) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &\subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n. & (2) \quad (\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n)^c &= \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c. \\ (3) \quad A_n \uparrow &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. & A_n \downarrow &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \end{aligned}$$

7. \mathbf{R} 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し, 次の集合は何を表しているか答えよ.

$$\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \{x \in \mathbf{R}; |f_n(x) - f(x)| \leq 1/k\}.$$

集合 X, Y に対して, $X \times Y := \{(x, y); x \in X, y \in Y\}$ を X と Y の直積集合, または単に直積 (product) といい, その元 (x, y) を順序対という. $((x, y)$ と (y, x) は順序対としては一般に異なり, よって一般に $X \times Y \neq Y \times X$ である). さらに集合族 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ に対して, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n \equiv X_1 \times X_2 \times \cdots := \{(x_n)_{n \geq 1} = (x_1, x_2, \dots); x_n \in X_n, n \geq 1\}$ と定義する (この元を $\Pi_n x_n$ と表すこともある). また $P_k : (x_n)_n \rightarrow x_k$ を $\prod_n X_n$ から X_k への射影 (projection) という.

1. 次の成り立つことを示せ.

$$(1) \quad X \times (Y_1 \cup Y_2) = (X \times Y_1) \cup (X \times Y_2) \quad (2) \quad X \times (Y_1 \cap Y_2) = (X \times Y_1) \cap (X \times Y_2)$$

より一般的にもっと多くの集合族に対して和集合と直積集合を次のように定義する.

X の部分集合族 $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t \in I}$ に対し (I は添字集合 (index set), $I = [0, 1]$ など)

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{t \in I} A_t &= \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{A_t; t \in I\} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists t \in I; x \in A_t \\ x \in \bigcap_{t \in I} A_t &= \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{A_t; t \in I\} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall t \in I, x \in A_t \end{aligned}$$

と定義すると前と同様に De Morgan の法則が成り立つ;

$$\left(\bigcup_{t \in I} A_t \right)^c = \bigcap_{t \in I} A_t^c, \quad \left(\bigcap_{t \in I} A_t \right)^c = \bigcup_{t \in I} A_t^c.$$

また集合族 $\{X_t\}_{t \in I}$ に対して, $\prod_{t \in I} X_t := \{(x_t)_t; x_t \in X_t, t \in I\}$ と定義する (この元を $\Pi_t x_t$ と表す). さらに $P_s : (x_t)_t \rightarrow x_s$ を上と同様に $\prod_t X_t$ から X_s への射影という.

3 写像 (mapping)

X, Y を集合とする. X の各元 x に Y の元 y が一つずつ対応しているとき, その対応を $f: X \rightarrow Y; x \rightarrow y = f(x)$ と表し, 写像 (mapping) という. また $f(X) = \{f(x); x \in X\} \subset Y$ を f の値域 (range) という.

$A \subset X, B \subset Y$ に対し, $f(A) = \{f(x); x \in A\}$ を f による A の像 (image), $f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$ を f による B の逆像 (inverse image) or 原像 という. 特に $f(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \text{像} \quad y \in f(A) &\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists x \in A; y = f(x) \quad (\text{この } x \text{ は一つとは限らない}) \\ \text{逆像} \quad x \in f^{-1}(B) &\stackrel{\text{def}}{\iff} f(x) \in B \end{aligned}$$

以下では $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- 「 f^{-1} は集合の演算を保つ」ことを確かめよ. すなわち $B, B_1, B_2, \dots \subset Y$ に対して,
 - $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
 - $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
 - $f^{-1}(\bigcup_n B_n) = \bigcup_n f^{-1}(B_n), f^{-1}(\bigcap_n B_n) = \bigcap_n f^{-1}(B_n)$
 - $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$
- f は一般に集合の演算を保つとは限らないことを確かめよ, $A, A_1, A_2, \dots \subset X$ に対して,
 - $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$
 - $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$, だが $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
 - $f(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n f(A_n)$, だが $f(\bigcap_n A_n) \subset \bigcap_n f(A_n)$
 - 上の (2) の後半で「 $=$ 」とならない例を挙げよ
- $A \subset X, B \subset Y$ に対して, 次を示せ
 - $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X), f^{-1}(f(A)) \supset A$
 - $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B, f^{-1}(f(A) \cap B) \supset A \cap f^{-1}(B)$

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して,

f が単射 (injection) or 一对一写像 (one to one) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall y \in f(X), \exists! x \in X; y = f(x)$
(このとき逆の $f(X)$ からの対応も写像となり $f^{-1}: f(X) \rightarrow X; y \rightarrow f^{-1}(y)$ を逆写像 という.)

f が全射 (surjection) or 上への写像 (onto) $\stackrel{\text{def}}{\iff} f(X) = Y$, 特に $f(X) \supset Y$, i.e., $\forall y \in Y, \exists x \in X; y = f(x)$

f が全単射 (bijection) $\stackrel{\text{def}}{\iff} f$ が全射かつ単射, i.e., $\forall y \in Y, \exists! x \in X; y = f(x)$

特に $f: X \rightarrow X; f(x) = x$ を恒等写像 (identity mapping) といい, I_X, id_X や単に I, id などと表す.

写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ に対して, その合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ を $g \circ f(x) = g(f(x))$ で定義する. 明らかに結合律が成り立つ; $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$: これを簡単に $h \circ g \circ f$ と表す.

- f が単射 $\iff [f(x) = f(y) \implies x = y] \iff [x \neq y \implies f(x) \neq f(y)]$ を示せ.
(同値なのでこれを定義と思っても良い. 実際, こちらの方が使いやすい.)
- $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とその合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ に対し, 次を示せ
 - f, g が単射なら $g \circ f$ も単射
 - f, g が全射なら $g \circ f$ も全射
 - f, g が全単射なら $g \circ f$ も全単射で $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
 - $g \circ f$ が単射なら f は単射, さらに f が全射なら g は単射
 - $g \circ f$ が全射なら g は全射, さらに g が単射なら f は全射

さて写像において、次の濃度という概念を導入する際に、全単射な写像が重要な役割を果たすのだが、全単射であることを確かめるのに、役立つ結果を一つ挙げておく。

定理 $f : X \rightarrow Y$ を写像とする。もしある写像 $g : Y \rightarrow X$ が存在して、 $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ を満たすなら、 f は全単射で、しかも $g = f^{-1}$ となる。

証明 まず $g \circ f = id_X$ なら f 単射を示す。 $f(x_1) = f(x_2)$ とすると仮定と合成写像の定義、 g が写像ということを用いて、

$$x_1 = g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2) = x_2$$

を得るので、 f は単射となる。

次に $f \circ g = id_Y$ なら f 全射を示す。 $\forall y \in Y, y = f \circ g(y) = f(g(y))$ より、 $x = g(y)$ とおけば $x \in X$ で $y = f(x)$ と表せることになるので、 f は全射となる。 ■

6. 次の写像 f が全単射であることを示せ。

(逆写像 f^{-1} を求めれば良い。それが難しいときは直接、定義に戻って示す.)

$$(1) f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}; f(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} -k & (n = 2k + 1, k \geq 0) \\ k & (n = 2k, k \geq 1) \end{cases} \quad \text{とおけば、全単射.}$$

但し、 $[x]$ はガウス記号で、 x を超えない最大整数を表す。

$$[f^{-1}(m) = -2m + 1 \ (m \leq 0), = 2m \ (m \geq 1)]$$

$$(2) \mathbf{N}^2 := \mathbf{N} \times \mathbf{N} \text{ に対し, } f : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}; f((p, q)) = p + (p + q - 1)(p + q - 2)/2.$$

(群列の考え方、 $n := f((p, q)), k := p + q - 1$ とすると、 n は第 k 群の q 番目とみなせる.)

$$(3) A \subset \mathbf{N} \text{ を無限部分集合とする. } f : A \rightarrow \mathbf{N}; f(a) = \#\{n \in A; n \leq a\}$$

(A の元を大きさの順に並べて、順番に番号を付けたもの)

$$(4) \mathbf{Q}_+ := \{x \in \mathbf{Q}; x > 0\} \text{ と } A := \{(p, q) \in \mathbf{N}^2; p, q \text{ は互いに素}\} \text{ として } f : A \rightarrow \mathbf{Q}_+; f((p, q)) = p/q.$$

$$(5) \text{ 上のことから } \mathbf{Q}^+ = \{r_n\}_{n=1}^\infty \text{ と表せる. } f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}; f(n) = (-1)^n r_{[n/2]}.$$

少し先走りになるが、二つの集合 X と Y があったときに、その集合の元の数を比較するのに有限個であれば数えてしまえば良いが、無限個あったとき、単に無限個というのではなく、それを更に比較できる方法はないかという問題がある。これを解決するために、次の濃度という概念が必要になる。その際、もし X から Y への全単射な写像 f があれば X と Y の元の数は同じと言って良いだろう。従って、このとき X と Y の濃度は同じである; $|X| = |Y|$ として、 X と Y は対等である; $X \sim Y$ という。また自然数全体の濃度は可算無限であるということにする。

上の問により、 $\mathbf{Z}, \mathbf{N}^n \ (n \geq 1), \mathbf{Q}$ など全て、 \mathbf{N} と対等 (全単射が存在)、即ち、その濃度は可算である。

$$\mathbf{N} \sim \mathbf{Z} \sim \mathbf{N}^n \sim \mathbf{Q}, \quad \text{i.e., } |\mathbf{Z}| = |\mathbf{N}^n| = |\mathbf{Q}| = \aleph_0 \quad (:= |\mathbf{N}|).$$

4 ε - δ 論法 (ε - δ Logic)

[論理記号の説明]

・「 \forall 」任意の

・「 \exists 」存在して

・「s.t. = such that」以下をみたくような (講義では「; (セミコロン)」を用いる.)

例えば 「 $\forall x \in I; |x - a| < \delta$ 」は「 $|x - a| < \delta$ をみたすような任意の $x \in I$ 」を意味する。

他に慣習として

- ε は十分小さい正の数を表すのによく用いる。
- L, M など十分大きい正の数を表すのに用いることが多い。
- δ はよく $\forall \varepsilon > 0$ に応じて決まってくる (存在する) 正の数 (実数) を表す。
(しかも小さければ小さいほど良いことが多い.)
- N も ε に応じて決まってくる番号 (自然数) を表す。
(こちらは大きければ大きいほど良いことの方が多い.)
- 他に ε_0 や N_0 など書いたときはある特定の値を表すことが多い。
(大き過ぎても小さ過ぎてもダメ.)

例えば 「数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbf{R}$ に収束する。」というのは

「どんな小さい正の数 ε をとっても, ある番号 N が存在し, N 以上のどんな番号 n に対しても a_n と α の差の絶対値が ε で抑えられる。」

あるいはもう少し堅く,

「任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, 任意の番号 $n \geq N$ に対し, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ をみたす。」

これを記号で表すと

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \right] \text{ or } \left[a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty) \right] \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}; \forall n \geq N, |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

[注意] ここで N は ε に応じて決まってくるので $N = N(\varepsilon)$ or $N = N_\varepsilon$ と表すこともある。

さらに否定命題を作るときには形式的には

『 \forall 』と『 \exists 』を入れ換え, セミコロンをコンマに変えて, \exists の後にはセミコロンをつけて, 最後の式を否定すれば良い』

が, それにより依存関係が変わることに注意すべき!!

上の例でいくと「数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbf{R}$ に収束しない。」というのは

$$\begin{aligned} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \alpha \right] \text{ or } \left[a_n \not\rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty) \right] &\iff \exists \varepsilon_0 > 0; \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geq N; |a_n - \alpha| \geq \varepsilon_0 \\ &\iff \exists \varepsilon_0 > 0; \forall k \in \mathbf{N}, \exists n \geq k; |a_n - \alpha| \geq \varepsilon_0 \\ &\iff \exists \varepsilon_0 > 0; \exists \{n_k\}_{k \geq 1}; n_k \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty), |a_{n_k} - \alpha| \geq \varepsilon_0. \end{aligned}$$

[注意] ここで N (あるいは k) は任意で, 肯定のときのように ε_0 に依存することはない。しかし番号 n は ε_0 に依存してとれる。さらに 2 行目から 3 行目の書き直しでは, 番号 k を順に大きくしていくとそれに応じてとれる $n = n_k$ もいつかは大きくならざるおえない。(いくつか可能性があるため, 初めに大きな n を選ぶと, 途中のいくつかを小さいものに変えても最後の不等式が成り立つ可能性がある。しかし真に大きくなるように数列 $\{n_k\}$ をとることは可能である。) この数列 $\{n_k\}$ は ε_0 に応じて決まる。即ち, ε_0 の値が変わると数列 $\{n_k\}$ も違うものになる可能性がある。

[問 1] 次の各定義の否定命題を述べ, 出て来る量の依存関係を考えよ。

1. 空でない集合 $S \subset \mathbf{R}$ に対して,

(a) 上限 (supremum) $\alpha = \sup S \stackrel{\text{def}}{\iff}$

(1) もし S が上に有界 ($\exists c \in \mathbf{R}; \forall x \in S, x \leq c$) なら,

- (i) $\forall x \in S, x \leq \alpha$, (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in S; \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon (\leq \alpha)$
 (上限は, 常に「以上」だが, ちょっと削ると, どれかに越されてしまう.)
 (2) もし S が上に非有界なら, $\alpha = \infty$, i.e., $\sup S = \infty$ とする.
- (b) 下限 (infimum) $\beta = \inf S \stackrel{\text{def}}{\iff}$
 (1) もし S が下に有界 ($\exists d \in \mathbf{R}; \forall x \in S, d \leq x$) なら,
 (i) $\forall x \in S, \beta \leq x$, (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in S; (\beta \leq) x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$
 (下限は, 常に「以下」だが, ちょっと増やすと, どれかを越してしまう.)
 (2) もし S が下に非有界なら, $\beta = -\infty$, i.e., $\inf S = -\infty$ とする.

2. 区間 $I = [a, b]$ で定義された関数 $f = f(x)$ について

- (a) $f(x)$ が点 $x_0 \in I$ で連続 (continuous at x_0)
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in I; |x - x_0| < \delta, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
- (b) $f(x)$ が区間 I で連続 (continuous on I)
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} f(x)$ が $\forall x_0 \in I$ で連続
 $\iff \forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in I; |x - x_0| < \delta, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
 ($\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ は $x_0 \in I, \varepsilon > 0$ に依存して決まる. (もちろん関数 f 自身にも依存する.)
)
- (c) $f(x)$ が I で一様連続 (uniform continuous on I)
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x, y \in I; |x - y| < \delta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
 ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ は $\varepsilon > 0$ のみに依存して決まる. (x, y には無関係であることを注意。))

3. 集合 $S \subset \mathbf{R}$ で定義された関数列 $f_n(x)$ と関数 $f(x)$ について

- (a) f_n が f に S で各点収束 (pointwise convergence) 記号で $f_n \rightarrow f$ on S (or $f_n \rightarrow f$ p.w. on S)
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}; \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$
 ($N = N(x, \varepsilon) > 0$ は $x \in S$ と $\varepsilon > 0$ に依存して決まる.)
- (b) f_n が f に S で一様収束 (uniform convergence) 記号で $f_n \rightrightarrows f$ on S (or $f_n \rightarrow f$ unif. on S)
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}; \forall n \geq N, \forall x \in S, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$
 これは次のようにも表される:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}; \forall n \geq N, \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| = 0$
 ($N = N(\varepsilon) > 0$ は $\varepsilon > 0$ のみに依存して決まる. x には無関係.)

例えば, 「 f が S で一様連続でない」というのは

$$\exists \varepsilon_0 > 0; \forall \delta > 0, \exists x_\delta, y_\delta \in S; |x_\delta - y_\delta| < \delta, |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

ここで x_δ, y_δ と書いたが, $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ から δ に依存するのは明らかであるから x, y のままでも構わないが, こう書いておいた方が都合が良いときもある. (ちなみにこれは ε_0 にも依存する, もちろん, 関数 f にも.) よくやるのは $\delta > 0$ が任意だから, 初めに番号 $\forall n \geq 1$ をとり, これに対し, $\delta = 1/n$ として, このとき存在する x_δ, y_δ を $x'_n := x_{1/n}, y'_n := y_{1/n}$ として, おき直すことがある. (「有界閉区間上の連続関数は一様連続」の証明で用いる.)

5 濃度 (Potency)

\mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} をそれぞれ自然数, 整数, 有理数, 実数 とする.

(Natural numbers, Integers, Rational numbers, Real numbers)

集合 X, Y に対し,

$$X \sim Y \text{ 対等 (equipotent)} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists f: X \rightarrow Y; \text{ 全単射,}$$

このとき X と Y は同じ 濃度 (potency) (あるいは 基数 (cardinals)) を持つという.

濃度の表し方は色々あり $|X|$ や \overline{X} , $\#X$, $\text{Card } X$ などを用いるが, ここでは最初の表し方を用いることにする. 例えば $|\emptyset| = 0$, $|\{1, 2, \dots, n\}| = n$ など.

$$X \text{ 有限集合 (finite set)} \stackrel{\text{def}}{\iff} |X| < \infty \quad (|X| = 0 \text{ すなわち } X = \emptyset \text{ も含む})$$

$$X \text{ 無限集合 (infinite set)} \stackrel{\text{def}}{\iff} X \text{ が有限集合でない}$$

さらに無限集合を分けるために $X \sim \mathbf{N}$ のとき $|X| = \aleph_0$ (aleph zero) と表し, 可算 (countable) という. 特に, $|X| \leq \aleph_0$ (X が有限または可算無限) のとき, 高々可算であるという. そうでないときは 非可算 (uncountable) という.

定理 \mathbf{Z} , \mathbf{N}^n ($n \geq 1$), \mathbf{Q} は可算. また可算集合の無限部分集合も可算. しかし, \mathbf{R} は非可算.

証明

(1) \mathbf{Z} は可算, i.e., $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$.

$$f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}; f(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} -k & (n = 2k + 1, k \geq 0) \\ k & (n = 2k, k \geq 1) \end{cases}$$

とおけば, 全単射. 但し, $[x]$ はガウス記号で, x を超えない最大整数を表す.

(\rightarrow 示せ) (逆写像が存在することを言えば良いので, $f^{-1}(m)$ を求めよ).

$$[f^{-1}(m) = -2m + 1 \ (m \leq 0), = 2m \ (m \geq 1)]$$

(2) \mathbf{Q} は可算無限で, \mathbf{R} は非可算.

(a) $\mathbf{N}^2 := \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ は可算. 従って \mathbf{N}^n ($n \geq 1$) も可算.

$$f: \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}; f((p, q)) = p + (p + q - 1)(p + q - 2)/2$$

とおけば, 全単射. (群列の考え方, $n := f((p, q))$, $k := p + q - 1$ とすると, n は第 k 群の q 番目とみなせる.)

(b) 可算集合 X の無限部分集合 A も可算

X と \mathbf{N} を同一視することにより, \mathbf{N} の無限部分集合 A に対し, $A \sim \mathbf{N}$ を示せば十分. A の元を大きさの順に並べて, 順番に番号を付ければ良い. 即ち,

$$f: A \rightarrow \mathbf{N}; f(a) = \#\{n \in A; n \leq a\}$$

とおけば, 全単射.

(c) $\mathbf{Q}_+ := \{x \in \mathbf{Q}; x > 0\}$ も可算

$A := \{(p, q) \in \mathbf{N}^2; p, q \text{ は互いに素}\}$ とおけば, 上より, $A \sim \mathbf{N}$.

$$f : A \rightarrow \mathbf{Q}^+; f((p, q)) = p/q$$

とおけば, 全単射.

(d) \mathbf{Q} は可算

$\mathbf{N} \sim \mathbf{Q}^+$ より, $\mathbf{Q}^+ = \{r_n\}_{n=1}^\infty$ と表せる.

$$f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}; f(n) = (-1)^n r_{\lfloor n/2 \rfloor}$$

とおけば, 全単射.

もしくは上と同様に $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ も可算が示せるので, その互いに素な組全体 B も可算で, $f : B \rightarrow \mathbf{Q}; f((p, q)) = p/q$ とおけば全単射.

(e) もし \mathbf{R} が可算であるとする矛盾 (対角線論法)

仮定より, $(0, 1] \subset \mathbf{R}$ も可算となるので, $(0, 1] = \{a_n\}_{n \geq 1}$ と表せる. そこで 10 進法を用いて,

$$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3} \cdots \quad (a_{ni} = 0, 1, \dots, 9)$$

と表す. 但し, $1 = 0.99 \cdots$ のように 2 通りの表し方のある数は無限小数で表すことにしておく (即ち, 全て, 無限小数に表記を統一しておく.) 今,

$$b = 0.b_1b_2b_3 \cdots, \quad b_n = \begin{cases} 1 & (a_{nn} = 0, 2, 4, 6, 8) \\ 2 & (a_{nn} = 1, 3, 5, 7, 9) \end{cases}$$

とおく. つまり, (a_{ni}) の対角成分 a_{nn} と異なる値を b_n として表される数を b とする. このとき明らかに $b \in (0, 1]$ であるが, $b_n \neq a_{nn}$ より, $\forall n \geq 1, b \neq a_n$ となり, 矛盾する. これは初めの仮定で, \mathbf{R} を可算としたことに起因する. 従って, \mathbf{R} は非可算. ■

2. 上の (1) 及び (2) の (a) ~ (d) で, 各々の f が全単射であることを示せ. f^{-1} を求めよ.

これから実数の濃度は非可算で, それを 連続体の濃度 (potency of continuum) といい, $|\mathbf{R}| = \aleph$ と表す.

3. 次の集合はそれぞれ対等であることを示せ. ただし $-\infty < a < b < \infty$ とする.

(1) $[0, 1]$ と $[a, b]$, $[0, 1)$ と $[a, b)$, $(0, 1]$ と $(a, b]$, $(0, 1)$ と (a, b)

(2) $[0, 1]$ と $[0, 1)$, $[0, 1)$ と $(0, 1)$, $(0, 1)$ と $(0, 1]$, $(0, 1]$ と $[0, 1]$

($f : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$ は $1/n \rightarrow 1/(n+1)$ で, 他はそのままを考える.)

(3) \mathbf{R} と $(-1, 1)$

$$(y = \frac{2}{\pi} \arctan x \text{ or } x = \tan(\pi y)/2)$$

(4) $(0, 1)^2 := (0, 1) \times (0, 1)$ と $(0, 1)$

($f : (0, 1)^2 \rightarrow (0, 1)$ 単射を作る, 10 進法で, 交互に並べる, ベルンシュタインの定理の後に)

このことから全ての, 空でない区間は実数と対等, すなわち連続の濃度を持つ. さらに \mathbf{R}^n ($n \in \mathbf{N}$) も連続の濃度を持つことがいえる.

一般に集合 X に対して, その全部分集合族 (巾集合 (power set) ともいう) $\{A; A \subset X\}$ を 2^X と表す (ことが多い. 他に $\mathcal{P}(X)$ など.) これには実は意味がある. 普通, 集合 X から Y への写像の全体を $Y^X := \{f : X \rightarrow Y; \text{写像}\}$ と表すのだが, Y が 2 点集合 (例えば $Y = \{0, 1\}$) のとき $Y^X (= \{0, 1\}^X) = 2^X$ と表す. これは X の各元 x に対して, その元をとるか ($f(x) = 1$), とらないか ($f(x) = 0$) を表す写像の全

体だと考えることができる. このとき $f(x) = 1$ となる点 x の全体は X の 1 つの部分集合を表す. これにより写像 $f \in 2^X$ と X の部分集合 $A = \{x \in X; f(x) = 1\}$ を同一視することができる, というのである.

$$\begin{aligned} |X| \leq |Y| &\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists f : X \rightarrow Y; \text{ 単射} \\ |X| < |Y| &\stackrel{\text{def}}{\iff} |X| \neq |Y| \text{ and } |X| \leq |Y|. \end{aligned}$$

- Cantor の定理: $|X| < |2^X| (= 2^{|X|})$ と表す, 特に $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph$ が成り立つ

証 まず $f : X \rightarrow 2^X; f(x) = \{x\}$ と定義すると, 明らかに単射で, 故に, $|X| \leq |2^X|$. 後は X と 2^X の間に全単射な写像が存在しないことをいえば良い. それには 2^X から X への単射が存在しないことを示せば十分. 背理法を用いる. もし $\exists g : 2^X \rightarrow X; \text{単射とする.}$

$$B := \{a = g(A) \in X; A \in 2^X, a = g(A) \notin A\} (\subset X), \quad b := g(B)$$

とおくと, $b \in X$ で, もし $b \in B$ なら, 定義の仕方から, $\exists A \subset X; g(B) = b = g(A) \notin A$ で, $g(B) = g(A)$ と g 単射より, $B = A$ となり, $b \notin A = B$ で, 仮定に矛盾. もし $b \notin B$ なら, $A = B$ として定義の条件をみたら, $b \in B$ となってしまう矛盾. 以上から, 2^X から X への単射が存在しない. 従って, $|X| < |2^X|$. ■

- (Schröder-) Bernstein の定理: $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X| \implies |X| = |Y|$.

証 仮定より, 単射な写像 $f : X \rightarrow Y$ と $g : Y \rightarrow X$ が存在する. 各 $y \in Y$ に対し, f で写されるもとの元 $x \in X$ があるかないかに分かれる. 同様に各 $x \in X$ に対し, g で写されるもとの元 $y \in Y$ があるかないかに分かれる. そこで,

- $A_\infty \subset X$ を $a \in X$ に写ってくるもとの元が, Y, X, Y, X, \dots と順に遡って行けるような無限のつながりがある a の全体; $a \leftarrow b_1 \leftarrow a_1 \leftarrow b_2 \leftarrow a_2 \leftarrow \dots$
- $A_X \subset X$ を $a \in X$ に写ってくるもとの元が, 無いか, あっても Y, X, Y, X, \dots, Y, X と有限までで, 最後が X の元で, それに対応する元の Y の元が存在しない a の全体, $a \leftarrow \emptyset$ or $a \leftarrow b_1 \leftarrow a_1 \dots \leftarrow b_n \leftarrow a_n$
- $A_Y \subset X$ を $a \in X$ に写ってくるもとの元が, Y, X, Y, X, \dots, X, Y と有限まであり, 最後が Y の元で, それに対応する元の X の元が存在しない a の全体, $a \leftarrow b_1 \leftarrow a_1 \dots \leftarrow b_n$
- X, Y を入れ換えて, 同様に $B_\infty, B_Y, B_X \subset Y$ を定義する.

明らかに

$$X = A_\infty \cup A_X \cup A_Y \text{ (素和)}, \quad Y = B_\infty \cup B_Y \cup B_X \text{ (素和)}$$

で, また

$$f(A_\infty) = B_\infty, \quad f(A_X) = B_X, \quad g(B_Y) = A_Y$$

が成り立つ. しかもそれぞれの間では f, g は全単射となる.

($f(A_Y) = B_Y, g(B_X) = A_X$ は一般に成り立たず, $f(A_Y) \subset B_Y, g(B_X) \subset A_X$ までしかいえないことに注意. $f(A_Y)$ の中にはもとの X の元が対応しない Y の元が含まれないから. $g(B_X)$ も同様.)

従って $h : X \rightarrow Y$ を $h = f$ on $A_\infty \cup A_X, h = g^{-1}$ on A_Y で定義すれば全単射となる. ■

- $(0, 1)^2 \sim (0, 1)$ について.

$|(0, 1)| \leq |(0, 1)^2|$ は明らか. ベルンシュタインの定理より逆を示せば良い. $(a, b) \in (0, 1)^2$ に対し, 10 進法表示を用いて, $a = 0.a_1a_2a_3\cdots, b = 0.b_1b_2b_3\cdots$ と表す. 但し, 有限小数は全て, 9 が無限に続く表し方に統一しておく (例えば, $0.23 = 0.22999\cdots$ と). そこで写像 $f : (0, 1)^2 \rightarrow (0, 1)$ を

$$f(a, b) := 0.a_1b_1a_2b_2\cdots$$

と定義すれば, 単射となり, $|(0, 1)^2| \leq |(0, 1)|$ をえる.

ちなみにこの写像は全射とはならない. 明らかに $0.101010\cdots$ に写る元の点はない, 仮に問題を $[0, 1]$ と $[0, 1]^2$ に変えても, 同様に, 例えば $0.11010101\cdots$ (01 が無限に続く) に写ってくる元の点を考えると, $a = 0.1 = 0.100000\cdots, b = 0.11111\cdots$ となるが, 初めに表現を無限小数に統一したので, この a は存在しないことになる. (たとえ, 元の表現を有限小数に統一しても, 今度は $0.11191919\cdots$ に写ってくる元の点がないことになる.)

ケーニッヒの記法を用いれば全単射な写像を作ることができる. 無限小数表示にして, その切り方を 0 でない数の後で分けて行く, e.g., $x = 0.0010320450001\cdots = 0.\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6\cdots$ ($\bar{x}_1 = 001, \bar{x}_2 = 03, \bar{x}_3 = 2, \bar{x}_4 = 04, \bar{x}_5 = 5, \bar{x}_6 = 0001, \dots$) と表して $a = 0.\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_5\cdots, b = 0.\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_6\cdots$ とおけば $x \rightarrow (a, b)$ 全単射となる. ■

- 連続体仮説: 「 $\aleph_0 < \aleph$ だが, その間の濃度を持つ集合は存在しない」だろうという仮説 (証明はされてない, が, しかし, 「存在しようとしまいと集合論の公理系には何の影響も及ぼさない」ことが 1963 年, Cohen によって証明されている)

集合 A, B に対し, $F(A, B)$ で A から B への写像全体 B^A を表す. また集合 X に対し, 無限直積 X^∞ は無限列 (x_1, x_2, \dots) の全体を表す ($x_i \in X$). 次の問に答えよ.

4. A, B, C を集合として $F(A \times B, C) \sim F(A, F(B, C))$.
5. $2^{\mathbf{N}} \sim \{0, 1\}^{\mathbf{N}} = F(\mathbf{N}, \{0, 1\}) \sim \mathbf{R}$.
6. $\mathbf{R} \sim \mathbf{Z} \times [0, 1) \sim \mathbf{N} \times \mathbf{R}$. (整数部分と小数部分に分ける.)
7. $F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \sim 2^{\mathbf{R}}$.
 $[F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \sim F(\mathbf{R}, F(\mathbf{N}, \{0, 1\})) \sim F(\mathbf{R} \times \mathbf{N}, \{0, 1\}) \sim F(\mathbf{R}, \{0, 1\}) = \{0, 1\}^{\mathbf{R}} \sim 2^{\mathbf{R}}]$
8. $\mathbf{R}^\infty \sim \mathbf{R}^{\mathbf{N}} = F(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \sim \mathbf{R}$, 更に $\mathbf{N}^\infty \sim \mathbf{R}$.

整数係数の代数方程式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ ($n \in \mathbf{N}, a_i \in \mathbf{Z}, a_n \neq 0$) の複素数解を代数的数, その全体を \mathbf{A} . そうでない複素数を超越数, $\mathbf{A}^c := \mathbf{C} \setminus \mathbf{A}$ とおく.

9. 代数的数全体 \mathbf{A} は高々可算であることを示せ.
 $[N = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$ において, 考えれば良い.]
10. $\alpha \in \mathbf{A}$ なら $\mathbf{N}\alpha \subset \mathbf{A}$, また $\beta \in \mathbf{A}^c$ なら $\mathbf{N}\beta \subset \mathbf{A}^c$ を示せ.
11. 超越数全体 \mathbf{A}^c は連続無限あることを示せ.

最後の問の結果は本質的には連続無限から可算部分を取り除いても連続無限であることと同じで, これは実数全体 \mathbf{R} において, 無理数全体 \mathbf{Q}^c が連続無限なることと同じ. 連続体仮説を認めれば明らかだが, これを用いずに示すにはどうすれば良いか?

[無理数をつつ x_0 任意に固定して, $\mathbf{N}x_0 := \{x = nx_0 : n \in \mathbf{N}\}$ を考えると, これも無理数で, しかも可算. 従って $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^c \sim \mathbf{N} \cup \mathbf{Q}^c \sim \mathbf{N}x_0 \cup \mathbf{Q}^c = \mathbf{Q}^c$. ここで実は最後の対等の式 $\mathbf{N} \cup \mathbf{Q}^c \sim \mathbf{N}x_0 \cup \mathbf{Q}^c$ にはゴマカシがあるが, 厳密に述べるとどうなるか?]

6 同値関係と順序 (Equivalence Relation and Order)

集合 X において, 任意の 2 つの元 $x, y \in X$ に対して関係 (relation) \sim が与えられている $x \sim y$ が, 与えていない $x \not\sim y$ が決まっているとする. (もっと一般には X, Y の直積の部分集合 $R \subset X \times Y$ を X と Y の関係という. すなわち $x \sim y \iff (x, y) \in R$ と定義する).

このとき次の 3 条件をみたすとき, \sim を同値関係 (equivalence relation) という:

[反射律] (reflexive law) $x \sim x$

[対称律] (symmetric law) $x \sim y \implies y \sim x$

[推移律] (transitive law) $x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$

さらに同値関係 \sim が与えられたとき, これにより X を分類することができる. すなわち

$[x] := \{y \in X; x \sim y\}$ を同値類 (equivalence class) という.

例 6.1 $X = \mathbf{Z}$ として, $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} x - y \in 2\mathbf{Z}$ とおくと, これは同値関係となり, さらに同値類は $[x] = 2\mathbf{Z}$ if $x \in 2\mathbf{Z}$, $[x] = 2\mathbf{Z} + 1$ if $x \in 2\mathbf{Z} + 1$ の 2 つのみとなる.

1. 同値関係 \sim と同値類 $[x]$ に対し, 次が成り立つことを示せ.

$$(1) x \sim y \implies [x] = [y] \quad (2) x \not\sim y \implies [x] \cap [y] = \emptyset$$

また明らかに $x \in [x]$ であるから, 同値類の全体 $\{[x]\}_{x \in X}$ は X の分割を与える.

このとき $\{[x]\}_{x \in X} =: X/\sim$ と表し, X の \sim による商集合 (quotient set) という. 上の例では $X/\sim = \{2\mathbf{Z}, 2\mathbf{Z} + 1\}$ となる. これを $\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$ と表す. ($n \in \mathbf{N}$ なら $\mathbf{Z}/(n\mathbf{Z})$ はどうなるか?)

2. 写像 $f: X \rightarrow X/\sim$ を $f(x) = [x]$ で定義すると全射となることを示せ.

3. $X = \mathbf{R}$ とし, $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} x - y \in \mathbf{Z}$ と定義すると, これが同値関係になり, さらに $f: [0, 1) \rightarrow \mathbf{R}/\sim; f(x) = [x]$ が全単射となることを示せ.

集合 X において, 関係 \preceq が次の 3 条件をみたすとき, 順序 (order) という:

[反射律] (reflexive law) $x \preceq x$

[反対称律] (anti-symmetric law) $x \preceq y, y \preceq x \implies y = x$

[推移律] (transitive law) $x \preceq y, y \preceq z \implies x \preceq z$

また $x \preceq y$ かつ $x \neq y$ のとき, $x \prec y$ とかく. この (X, \preceq) を順序集合 (ordered set) という. また $\forall x, y \in X$ に対して $x \preceq y$ か $y \preceq x$ が必ず成立するとき全順序集合という. 明らかに [全順序 \implies 順序].

例 6.2 次の例は共に順序となるが, 全順序ではない.

(1) S を集合として $X = 2^S$ とおく. $A, B \in X$, i.e., $A, B \subset S$ に対し, $A \preceq B \iff A \subset B$.

(2) $X = \mathbf{R}^2$ として $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ に対し, $x \preceq y \iff x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$.

順序集合 (X, \preceq) において $x \in X$ が極大元 (極小元) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall y \in X; x \preceq y$ ($y \preceq x$), $x = y$. また最大元・最小元, 上界・下界, 上限・下限は実数のときと同様に定義される. $A \subset X; A \neq \emptyset$ に対し, $[x \in X \text{ が } A \text{ の最大元} \stackrel{\text{def}}{\iff} x \in A, \forall a \in A, a \preceq x]$, $[x \in X \text{ が } A \text{ の一つの上界} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A, a \preceq x]$, また [上限 = 最小上界 (上界の最小元)].

任意の空でない部分集合が最小元をもつような順序集合を整列集合という. 2 点部分集合を考えれば, 「整列集合 \implies 全順序集合」.

4. 整列集合の例を挙げよ.

[N]

順序集合でその任意の全順序集合が上界をもつとき, 帰納的順序集合という.

7 選択公理と Zorn の補題 (Axiom of Choice, Zorn's Lemma)

定理 7.1 次の 3 つの命題は全て同値である :

- (1) 選択公理 空でない集合の族から 1 つずつ元がとれる (集合の数が可算無限個より多くても).
- (2) Zorn の補題 空でない帰納的順序集合は少なくとも一つ極大元をもつ.
- (3) 整列可能定理 空でない任意の集合 X は適当な順序 \preceq によって整列化できる.

また選択公理と明らかに同値な言い換えとして次の 2 つがある.

・Zermelo の公準 空でない互いに素な集合族 $\{X_t\}_{t \in T}$ において, その和の部分集合で各集合との交わりが 1 点集合となるものが存在する, i.e., $\exists X \subset \bigcup X_t; \forall t \in T, X \cap X_t = \{x_t\}$.

(これから選択公理を示すには, 空でない集合族 $\{X_t\}_{t \in T}$ に対し, $Y_t := \{t\} \times X_t$ を考えれば良い. $\{Y_t\}$ が互いに素となるから.)

・選択写像の存在 空でない集合 X に対し, 写像 $f : 2^X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X; f(A) \in A$ が存在する. この写像を選択写像という.

1. 選択公理と上の 2 つが同値であることを示せ.

[定理 7.1 の証明]

[整列可能定理 \Rightarrow 選択公理] $X_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ を空でない集合からなる族とする. それらの和集合 $X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に対し, 仮定から, 適当な順序 \preceq によって, (X, \preceq) は整列集合となる. 任意の空でない部分集合が最小元を持つので, 各 $X_\lambda \subset X$ の最小元をとれば, 選択公理をみだすことになる. ■

[Zorn の補題 \Rightarrow 整列可能定理] X を空でない集合として,

$$\mathcal{W} := \{(A, \alpha); A \subset X, \alpha \text{ 整列順序}\}$$

とおく. 1 点集合は明らかな整列集合なので $\mathcal{W} \neq \emptyset$. $(A, \alpha), (B, \beta) \in \mathcal{W}$ に対し,

$$(A, \alpha) \leq (B, \beta) \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subset B, \alpha = \beta|_A.$$

で, 順序 \leq を定義する.

(\mathcal{W}, \leq) は帰納的順序集合となる (任意の全順序部分が上界をもつ).

よって Zorn の補題により, $\exists (T, \preceq) \in \mathcal{W}$: 極大元 i.e., もし $(T, \preceq) \leq (T', \preceq') \in \mathcal{W}$ なら $(T, \preceq) = (T', \preceq')$.

実は $T = X$ で, 従って (X, \preceq) が整列集合となる.

[の証明] $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ を任意の全順序部分とする. $W := \bigcup \mathcal{W}_0 = \bigcup \{A; (A, \alpha) \in \mathcal{W}_0\} \subset X$ とおき, この上の順序 ω を, $x, y \in W$ に対し, $\exists (A, \alpha); x, y \in A$ で, $x \omega y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \alpha y$ と定義すれば, \mathcal{W}_0 の全順序性から well-defined となり, しかも (W, ω) は \mathcal{W}_0 の 1 つの上界となる.

[の証明] もし $T \subsetneq X$ なら, $a \in X \setminus T$ を 1 つとり, $T' := T \cup \{a\}$ に順序 \preceq' を $\preceq = \preceq$ on $T, \forall x \in T, x \preceq' a$ と定義すると $(T, \preceq) \leq (T', \preceq') \in \mathcal{W}$ となり, $T \subsetneq T'$ より T の極大性に反する. 故に $T = X$. ■

[選択公理 \Rightarrow Zorn の補題] (X, \preceq) を空でない帰納的順序集合とする. 即ち, 任意の全順序部分集合 W が上界をもつ ($\exists x \in X; \forall w \in W, w \preceq x$). [考え方としては, 1 点を固定し, それ以上の全順序部分の元で, ある条件を満たすものの最大のつながり (最大 f -列) をもってくれば, その上界の一つが実は極大元となることが言える.] ここで全順序部分集合があればその中から整列部分集合が (少なくとも離散的に) 取り出せることに注意して, 任意の整列部分集合 $W \subset X$ と $a \in W$ に対し, $W \langle a \rangle := \{w \in W; w \prec a\}$ (W の a 切片という),

$$\Delta(W \langle a \rangle) := \{x \in X; \forall b \in W \langle a \rangle, b \prec x\} \ni a \quad (a \text{ で横に切った線以上の } X \text{ 元全て})$$

とおく. 但し, $a = \min W$, i.e., $W\langle a \rangle = \emptyset$ のとき, $\Delta(W\langle a \rangle) := X$ とする. $\min(\Delta(W\langle a \rangle) \cap W) = a$ に注意. 今, 選択公理を仮定しているので選択写像が存在する. その一つを $f : 2^X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X; f(A) \in A$ とする. ここで

$$W \subset X : f\text{-列} \stackrel{\text{def}}{\iff} W : \text{整列部分集合}; \forall a \in W, a = f(\Delta(W\langle a \rangle))$$

と定義する. このとき $\min W = f(X)$ となる ($a = \min W$ なら $\Delta(W\langle a \rangle) = X$ より). 言い換えれば, $f(X) \in X$ 以上の全順序部分で $a = f(\Delta(W\langle a \rangle))$ を満たす元 a を小さい順に集めれば, 整列集合となり, それを f -列という. そこで \mathcal{W} を f -列の全体とし, $W_\infty := \bigcup \mathcal{W} = \bigcup_{w \in \mathcal{W}} W$ とおけば,

W_∞ が最大 f -列となる (つまり W_∞ は X のある全順序部分).

(X, \preceq) が帰納的という仮定から, 全順序部分である W_∞ の上界が存在し, その一つを w とする.

実は w が W_∞ の最大元となる.

従って, (X, \preceq) の一つの極大元となる.

[の証明] W_∞ が f -列であることを示せば, 最大性は明らか. それを次の手順で示す.

(1) W_1, W_2 : 共に f -列 $\Rightarrow W_1 = W_2$ or 一方が他方の切片となる.

[証] 後述の整列集合の比較定理から W_1 と W_2 は順序同型か, あるいは一方が他方の切片と順序同型となる. そこでまず $\exists b \in W_2, \exists \varphi : W_1 \rightarrow W_2(b)$; 順序同型を仮定し, $\forall x \in W_1, \varphi(x) = x$ を示せば, $W_1 = W_2(b)$ となる.

$$W'_1 := \{x \in W_1; \varphi(x) \neq x\} \neq \emptyset$$

と仮定し, $y := \min W'_1$ とおく. $\min W_i = f(X)$ で, $x \in W_1; x \prec y$ なら $\varphi(x) = x$ より $W_1\langle y \rangle = W_2\langle \varphi(y) \rangle$. よって $\Delta(W_1\langle y \rangle) = \Delta(W_2\langle \varphi(y) \rangle)$. 従って $y = f(\Delta(W_1\langle y \rangle)) = f(\Delta(W_2\langle \varphi(y) \rangle)) = \varphi(y)$ となり, $y \in W'_1$ に矛盾. 故に $W'_1 = \emptyset$. これから $W_1 = W_2(b)$ を得る. 同様にして $W_1 = W_2$ or $W_1\langle a \rangle = W_2\langle a \rangle$ ($a \in W_1$) も分る.

(2) W_∞ が整列集合となる.

[証] $M (\neq \emptyset) \subset W_\infty, a \in M$ をとる. W を a を含む f -列として, $m := \min(M \cap W)$ とおくと (存在については W が f -列; 整列集合だから) $m = \min M$ が成り立つ. 実際, もし $\exists x \in M; x \prec m$ とすると $x \in W_\infty$ より $x \in \exists W'; f$ -列. 一方, $m = \min(M \cap W), x \prec m$ から $x \notin W$, i.e., $x \in W' \setminus W$. よって (1) から $\exists b \in W'; W = W'(b)$. 即ち, $b = \min(W' \setminus W)$ で, $x \in W' \setminus W$ より $b \preceq x$. また $m \in W$ より, $m \prec b$. 従って $m \prec b \preceq x$ となり, $x \prec m$ に矛盾. 故に $m = \min M$. 即ち, W_∞ は整列集合となる.

(3) 任意の f -列 W に対し, $W = W_\infty$ or $W = W_\infty\langle a \rangle$ ($a \in W_\infty$).

[証] 直感的には (1) と任意の f -列 W に対し, $\min W = f(X)$ であったことから明らかであろう. 実際, $W \neq W_\infty$ と仮定して, $a := \min(W_\infty \setminus W)$ とおく. a を含む f -列の一つを W' とする. $a \notin W$ から (1) によって, $\exists b \in W'; W = W'(b)$. a の定義より $W_\infty\langle a \rangle \subset W$. また W_∞ の定義より $W' \subset W_\infty$ であるから $W'(a) \subset W_\infty\langle a \rangle$. さらに $b = \min(W' \setminus W)$ で, $a \in W' \setminus W$ なので $b \preceq a$ となり, $W'(b) \subset W'(a)$. 結局,

$$W_\infty\langle a \rangle \subset W = W'(b) \subset W'(a) \subset W_\infty\langle a \rangle$$

となり, $W = W_\infty\langle a \rangle$ を得る. 従って f -列 W に対し, $W \neq W_\infty$ であれば, $\exists a \in W_\infty; W = W_\infty\langle a \rangle$ が分った.

(4) W_∞ も f -列.

[証] $\forall a \in W_\infty$ に対し, a を含む f -列の一つを W とする. (3) から $W_\infty\langle a \rangle = W\langle a \rangle$, 即ち, $\Delta(W_\infty\langle a \rangle) = \Delta(W\langle a \rangle)$ となり, これから $f(\Delta(W_\infty\langle a \rangle)) = f(\Delta(W\langle a \rangle)) = a$ が成り立ち, W_∞ も f -列となる.

[の証明] まず w が極大元であることを示す. もしそうで無い, i.e., $\exists w' \in X; w \prec w'$ とすると W_∞ より大きいある f -列 W_* が作れて, 矛盾する. 実際, $\Delta_\infty := \{x \in X; \forall a \in W_\infty, a \prec x\}$ とおけば, $w' \in \Delta_\infty \neq \emptyset$. $z := f(\Delta_\infty) \in \Delta_\infty$ (f が選択写像より) として, $W_* := W_\infty \cup \{z\}$ とおけば明らかに整列集合で, $W_\infty = W_*\langle z \rangle$, $\Delta_\infty = \Delta(W_*\langle z \rangle)$ から $f(\Delta(W_*\langle z \rangle)) = z$ で, W_* が f -列となり, W_∞ が最大 f -列であることに矛盾. よって w は極大元. さらにもし w が W_∞ の最大元で無いとすると上と同様に $w \in \Delta_\infty$ となり, 矛盾が言える. よって w は W_∞ の最大元. ■

ここで上の の証明の (1) で用いた整列集合の比較定理について述べておく.

順序集合 $(X, \preceq), (Y, \preceq')$ に対し,

$$X \simeq Y \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varphi : X \rightarrow Y; \text{ 順序同型, i.e., } \varphi \text{ は全単射で, 順序を保つ;} \\ x_1 \preceq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \preceq' \varphi(x_2).$$

定理 7.2 (比較定理) 2 つの整列集合 $(X, \preceq), (Y, \preceq')$ について次のいずれかのただ 1 つが成り立つ.

$$(1) X \simeq Y, \quad (2) \exists a \in X; X \langle a \rangle \simeq Y, \quad (3) \exists b \in Y; X \simeq Y \langle b \rangle.$$

証明のために必要な事実を 2 つ示す.

補題 7.1 $(X, \preceq), (Y, \preceq')$ を整列集合とする. $X_1 = \{a \in X; \exists b \in Y; X \langle a \rangle \simeq Y \langle b \rangle\}$ とおくと, $X_1 = X$ or $\exists a_0 \in X; X_1 = X \langle a_0 \rangle$.

証明 $a \in X$ が最小元るとき $b \in Y$ も最小元として, $X \langle a \rangle = \emptyset \simeq \emptyset = Y \langle b \rangle$ とみて, $a \in X_1$, i.e., $X_1 \neq \emptyset$. $a \in X_1$ をとると $\exists b \in Y, \exists \varphi : X \langle a \rangle \simeq Y \langle b \rangle$. $x \in X \langle a \rangle$ に対し, $y := \varphi(x)$ とおくと $X \langle x \rangle \simeq Y \langle y \rangle$. よって $a \in X_1 \Rightarrow X \langle a \rangle \subset X_1$. そこで $X_1 \neq X$ と仮定して, $a_0 := \min(X \setminus X_1)$ とおくと, $X \langle a_0 \rangle \subset X_1$ かつ $a_0 \notin X_1$. 実は $X \langle a_0 \rangle = X_1$ となる. 実際, もし $X_1 \setminus X \langle a_0 \rangle \neq \emptyset$, i.e., $\exists a \in X_1; a_0 \prec a$ とすると $a_0 \in X \langle a \rangle \subset X_1$ となり $a_0 \notin X_1$ に矛盾. 従って $X_1 = X \langle a_0 \rangle$. 結局, $X_1 \neq X$ なら $X_1 = X \langle a_0 \rangle$. ■

補題 7.2 整列集合 (X, \preceq) に対し, $\varphi : X \rightarrow X$ が単射で, 順序を保てば, $\forall x \in X, x \preceq \varphi(x)$.

証明 $A := \{x \in X; \varphi(x) \prec x\}$ とおき, $A = \emptyset$ を示せば良い. $A \neq \emptyset$ として $a := \min A$ とおくと $\varphi(a) \prec a$ で, φ が順序を保つ単射なので, $\varphi(\varphi(a)) \prec \varphi(a)$, よって $\varphi(a) \in A$ となるが $\varphi(a) \prec a$ なので a の最小性に反する. 従って $A = \emptyset$. ■

[定理 7.2 の証明] $X_1 = \{a \in X; \exists b \in Y; X \langle a \rangle \simeq Y \langle b \rangle\}, Y_1 = \{b \in Y; \exists a \in X; X \langle a \rangle \simeq Y \langle b \rangle\}$ とおく. 定義より $a \in X_1$ に対応する $b \in Y$ は一意に決まり, しかも $b \in Y_1$ となる. そこで $\varphi : X_1 \rightarrow Y_1$ を $b = \varphi(a)$ で定義すると $\varphi : X_1 \simeq Y_1$. 上の補題 7.1 より, $X_1 = X$ or $\exists a \in X; X_1 = X \langle a \rangle$, また $Y_1 = Y$ or $\exists b \in Y; Y_1 = Y \langle b \rangle$. もし $X_1 = X \langle a \rangle$ かつ $Y_1 = Y \langle b \rangle$ とすると $X \langle a \rangle = X_1 \simeq Y_1 = Y \langle b \rangle$ となり, X_1 の定義から $a \in X_1 = X \langle a \rangle$ となってしまう, $a \notin X \langle a \rangle$ に反する. 従って主張の (1), (2), (3) のいずれかが成り立つことはいえる. 最後にこれらが同時に成り立たないことを示す. 例えば (2), (3) が同時に成り立つとする, i.e., $X \langle a \rangle \simeq Y, X \simeq Y \langle b \rangle$ とする. 合成写像 $\varphi : X \simeq Y \langle b \rangle \subset Y \simeq X \langle a \rangle \subset X$ は順序を保つ単射であり, $a \notin X \langle a \rangle$ より $\varphi(a) \prec a$ となり, 上の補題 7.2 に矛盾する. よって (2), (3) は同時に成り立たない. 他も同様である. ■

定理 7.3 (超限帰納法) (A, \preceq) を整列集合とし, 各 $a \in A$ についてある命題 $P(a)$ が与えられているとする. もし

(1) $P(\min A)$ が真 (2) $\forall a \in A; a \neq \min A, \forall b \in A \langle a \rangle, P(b)$ が真なら $P(a)$ も真
が成り立てば, $\forall a \in A, P(a)$ は真.

証明 $A_0 = \{a \in A; P(a) \text{ は真でない}\}$ とおく. もし $A_0 \neq \emptyset$ なら $a_0 := \min A_0$ とする. (1) から $a_0 \neq \min A$ で, a_0 の定義から $\forall a \in A \langle a_0 \rangle, P(a)$ は真. ところが (2) から $P(a_0)$ も真となり, $a_0 \in A_0$ に矛盾. 故に $A_0 = \emptyset$. ■

8 集合と位相 (Set and Topology)

2年生の講義で「位相 (topology)」というものを勉強するが、簡単にいってこれはある集合で点と点との近さを測るための最も抽象的な構造といえる。それが「近傍 (neighborhood)」や「開集合 (open set)」と呼ばれるものの集まりで、それが与えられたとき、位相が与えられたという。もう少しその概念を強くして、「距離 (metric)」と呼ばれるものを与えて、それによって開集合を定義し、位相を与えることもできる。

[位相] ある集合 X に対し、そのある部分集合族 \mathcal{O} が X の開集合族であるとは

$$(O1) \emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}.$$

$$(O2) G_1, G_2 \in \mathcal{O} \implies G_1 \cap G_2 \in \mathcal{O}.$$

$$(O3) G_\alpha \in \mathcal{O} (\alpha \in A) \implies \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{O}.$$

をみたすときをいう。最後の添字集合 A の濃度はいくら大きくても良い (可算である必要はない)。

この開集合族を位相構造、単に位相という。 (X, \mathcal{O}) を位相空間 (topology space) という。

[距離] 集合 X に対し、写像 $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty]; (x, y) \rightarrow d(x, y)$ が次の性質をみたすとき距離または距離関数という。

$$(D1) d(x, y) \geq 0; d(x, y) = 0 \iff x = y \text{ (分離性)}$$

$$(D2) d(x, y) = d(y, x) \text{ (対称性)}$$

$$(D3) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (三角不等式)}$$

このとき (X, d) を距離空間 (metric space) という。

\mathbf{R}^2 において、点 $x = (x_1, x_2)$ の大きさを $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ で定義し、 $d(x, y) = |x - y|$ とおくとこれが距離となる。さらに $\delta > 0$ に対し、 $U_\delta(x) \equiv \{y \in \mathbf{R}^2; d(x, y) < \delta\}$ を x の δ -近傍という。よくこの δ を省略して、単に $U(x)$ を x の近傍という。

点 $x = (x_1, x_2)$ がある集合 $S \subset \mathbf{R}^2$ の

$$\text{内点} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists U(x); x \text{ の近傍}, U(x) \subset S,$$

$$\text{外点} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists U(x); x \text{ の近傍}, U(x) \cap S = \emptyset,$$

$$\text{境界点} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U(x); x \text{ の近傍}, U(x) \cap S \neq \emptyset, \text{ かつ } U(x) \cap S^c \neq \emptyset.$$

内点は S に含まれ、外点は含まれない。境界点は含まれることもあるし、含まれないこともある。

S が内点のみからなる (境界点を含まない) とき開集合、境界点をすべて含むとき閉集合 (closed set) という。また境界点の全体を ∂S で表し、境界 (boundary) という。明らかに開集合の補集合は閉集合であり、その逆も成り立つ (任意の集合 S に対し、 $\partial(S^c) = \partial S$ による)。

1. この開集合族は上の位相の定義で述べた開集合族の条件をみたしていることを確かめよ。

2. 次の集合は開集合か閉集合か答えよ。

$$(1) \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 < 1\} \quad (2) \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

$$(3) \{(x_1, x_2); x_1 x_2 > 0\} \quad (4) \{(x_1, x_2); x_1, x_2 \in \mathbf{Q}\}$$

3. 任意の集合 S に対して、 ∂S は閉集合であることを示せ。

点 x の任意の近傍が S の点を無限個含むとき x を S の集積点、また境界点で集積点でない点を S の孤立点という。

4. 問 2 の各集合についてその集積点をすべて求めよ。

5. 「 S が閉集合 $\iff S$ の集積点がすべて S に属する」を示せ。

6. 「集合 S が閉集合 $\iff S$ の任意の収束列の極限が常に S に属する」を示せ。