数理統計学 II

確率論の基礎とランダムウォーク

(Basics of Probability Theory and Random Walks)

担当　平場　誠示

はじめに (Preface)

数理統計学の目的は，観察によって得られるランダムな現象のデータから, もとの現象をなるべく正確に推定することにある. そのための手法について解説するのが通常の数理統計学であるが, 現実には, 調べる対象に応じた, 確率モデルに対する数学的結果が必要となる. そこで本講義では, まず確率論の基礎となる事柄について述べ, 統計の手法の理論的根拠となる, 大数の法則と中心極限定理について述べる. さらにランダムウォークと呼ばれる単純な確率モデルについて得られる数学的結果について解説する.

「ランダムウォーク」とは. 例えば, コイン投げによって 1 歩進むか戻るかを決めるというモデルで, それが果たして出発点に戻ることが出来るかという問題について考える.

普通, 確率論関係の話をするときには「測度論」「ルベーグ積分論」の知識を必要とする. 本講義では初めにそのことについて基本的な定義や性質について述べるが, 後の話ではあまりそれを表に出さずに, 直感的に理解できるよう工夫した. 但し, 証明の都合上, どうしても「積分論」の知識を必要とする事柄に関しては補章に述べた.

目 次

1 確率論の基礎 (Basics of Proability Theory)

1.1 確率空間と確率変数 (Probability Spacees and Random Variables

確率論においては, 必ず, ある適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ があり, その上で定義された, ある確率変数 X を対象として, その色々な性質について調べて行こうとする.

ここで $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が**確率空間 (probability space)** とは

- Ω はある集合 (元を $\omega \in \Omega$ で表す)
- $\mathcal{F}$ $(\subset 2^{\Omega})$ は Ω 上の σ **集合体 (σ-field)**; (2^{Ω} は Ω の全部分集合族)

  (i) $\Omega \in \mathcal{F}$

  (ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

  (iii) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{F}$

  確率空間においては, $A \in \mathcal{F}$ を**事象 (event)** と呼ぶ.

- $P = P(d\omega)$ は可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の**確率測度 (probability measure)**, i.e., 全測度 1 の測度; $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ は集合関数で次をみたす.

  (i) $P(\Omega) = 1$

  (ii) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が互いに素 $\Rightarrow P(\bigcup A_n) = \sum P(A_n)$ (σ **加法性**)

問 1.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とするとき, 以下が成立することを示せ.

(i) σ-集合体は可算個の集合演算に関して閉じていることを示せ. 即ち,
$\mathcal{F}$ を σ-集合体とし, $A, B, A_n \in \mathcal{F}$ とする. 次も $\mathcal{F}$ に属することを示せ.

$$\emptyset, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

これから $\overline{\lim} A_n \equiv \limsup A_n := \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_n$, $\underline{\lim} A_n \equiv \liminf A_n := \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} A_n \in \mathcal{F}$ も分かる.
($\overline{\lim} = \inf \sup$, $\underline{\lim} = \sup \inf$ と覚えると良い.)

(ii) $P(\emptyset) = 0$, $\quad A_k \in \mathcal{F}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ が互いに素 $\Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$ (**有限加法性**).

(iii) $A, B \in \mathcal{F}; A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (**単調性**).

(iv) $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n \uparrow \Rightarrow P\left(\bigcup A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$.

(v) $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n \downarrow \Rightarrow P\left(\bigcap A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$. 上のと合わせて**確率の単調連続性**という.

(vi) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 1) \Rightarrow P\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum P(A_n)$ (**劣加法性**).

(vii) (**Borel-Cantelli の補題**)

$$A_n \in \mathcal{F} \ (n \geq 1), \sum P(A_n) < \infty \Rightarrow P\left(\limsup_{n \to \infty} A_n\right) = 0, \text{ i.e., } P\left(\liminf_{n \to \infty} A_n^c\right) = 1.$$

この確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された関数 $X = X(\omega) : \Omega \to \mathbf{R}$ が $\{X \le a\} := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \le a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$. をみたすとき**確率変数 (random variable)** という. 特に X が可算個の値 $S = \{a_j\}_{j \ge 1} \subset \mathbf{R}$ しかとらないとき, この条件は $\{X = a_j\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall j \ge 1)$ となる.

X_k を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数とする $(k = 1, 2, \ldots, n)$. このとき $\{X_k\}_{k=1}^n$ が**独立 (independent)** であるとは

$$P(X_1 \le a_1, \cdots, X_n \le a_n) = P(X_1 \le a_1) \cdots P(X_n \le a_n) \quad ({}^\forall a_k \in \mathbf{R}, k = 1, \ldots, n).$$

さらに上で n が無限のとき $\{X_k\}_{k \ge 1}$ が独立であるとは ${}^\forall N \ge 1$ に対して $\{X_k\}_{k=1}^N$ が独立なときをいう. 特に X_k が可算個の値 $S = \{a_j\}_{j \ge 1}$ しかとらないとき, 上の式は次のように変えても良い:

$$P(X_1 = b_1, \cdots, X_n = b_n) = P(X_1 = b_1) \cdots P(X_n = b_n) \quad (b_k \in S, k = 1, \ldots, n).$$

また $\mu(A) = P(X \in A)$ を X の**分布 (distribution)** といい, $F(x) = P(X \le x)$ を X の**分布関数 (distribution function)** という.

1.2 期待値, 平均値 (Expectations, Means)

以下では話を簡単にするため全ての確率変数 X は $\overline{\mathbf{Z}} := \mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$ に値をとるものとする. このとき X の**期待値 (expectation)** or **平均値 (mean)** $EX = E[X] = \int X dP = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$ を次のように定義する.

(1) $X \ge 0$ のとき

$$EX := \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) + \infty \cdot P(X = \infty).$$

$(P(X = \infty) = 0$ なら $\infty \cdot P(X = \infty) = 0$ とする. また $P(X = \infty) > 0$ なら $EX = \infty.)$

(2) X 一般のときは $X^+ := X \vee 0$, $X^- := (-X) \vee 0$ とおき (このとき $X^\pm \ge 0$, $X = X^+ - X^-$ となる $\to$ 確かめよ.) $EX := EX^+ - EX^-$ とおく. 但し, $\infty - \infty$ となるときは定義されないとする.

この定義を形式的に表せば $EX = \sum_{n \in \overline{\mathbf{Z}}} nP(X = n)$ で, 一般の関数 $f : \overline{\mathbf{Z}} \to \mathbf{R}$ に対しても, 形式的に $Ef(X) = \sum_{n \in \overline{\mathbf{Z}}} f(n) P(X = n)$ と定義する. (厳密には上のように $\sum_{n; f(n) > 0}$ と $\sum_{n; f(n) < 0}$ で分けて定義する.)

確率変数 X に対して, その分散を $V(X) := E[(X - EX)^2] = E[X^2] - E[X]^2$ で定義する.

定理 1.1 (Chebichev の不等式) $p \ge 1$ とする. このとき ${}^\forall a > 0$ に対し,

$$P(|X| \ge a) \le \frac{E[|X|^p]}{a^p}.$$

[証明] $P(|X| \ge a) = P(|X|^p \ge a^p)$ より $p = 1$ として示せば十分.

$$E|X| = \sum_{n \ge 1} nP(|X| = n) \ge \sum_{n \ge a} nP(|X| = n) \ge a \sum_{n \ge a} P(|X| = n) = aP(|X| \ge a).$$

■

定理 1.2 $X_1, \ldots, X_n$ を $\overline{\mathbf{Z}}$ に値をとる確率変数として, $E[X_k^2] < \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$ とする. このとき $X_1, \ldots, X_n$ が独立なら, $E[X_j X_k] = E[X_j] E[X_k]$ $(j \ne k)$. さらに平均が 0 $(E[X_k] = 0)$ なら

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^n E[X_k^2].$$

[証明]　(1) $j \neq k$ なら独立性から $P(X_j = m, X_k = n) = P(X_j = m)P(X_k = n)$ より

$$E[X_j X_k] = \sum_{m,n} mnP(X_j = m, X_k = n) = \sum_{m,n} mnP(X_j = m)P(X_k = n) = E[X_j]E[X_k].$$

(2) 展開式 $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \sum_{j \neq k} X_j X_k$ と (1) より $j \neq k$ なら $E[X_j X_k] = E[X_j]E[X_k] = 0$ となることから明らか. ■

1.3　大数の法則 (Law of Large Numbers)

コイン投げで, 投げる回数を増やしていくと表の出る割合が 1/2 に近づいていくという現象がある. これが大数の法則の典型的な例であるが, このとき 1 回毎にコインを投げるという行為は独立である.

数式化するには n 回目にコインを投げて, 表なら $X_n = 1$, 裏なら $X_n = 0$ と決める. このとき確率平均は $EX_n = 1/2$ (ちなみに分散は $V(X_n) = 1/2$ で有界). このとき n 回まで投げて, 表の出た回数の算術平均は $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ で, 大数の法則とはこれが $n \to \infty$ のとき, 確率平均の 1/2 に「近づく」ということである.

定理 1.3 (大数の弱法則 (Weak Law of Large Numbers))　$X_1, X_2, \ldots$ を独立な確率変数で, 平均一定 $EX_n = m$, 分散が有界 $v := \sup_n V(X_n) < \infty$ であるとする. このとき次が成り立つ : ${}^\forall\epsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \epsilon\right) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| < \epsilon\right) = 1.$$

[証明]　$\{X_n\}$ が独立であるから $\{\widetilde{X}_n = X_n - m\}$ も独立となる (確かめよ). よって

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$$

から, X_n の代わりに $\widetilde{X}_n$ を考えることにより, 初めから $m = 0$, i.e., $E[X_n] = 0$ として良い. このとき $V(X_n) = E[X_n^2]$ で, 前命題から

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \leq n \sup_n V(X_n) = nv.$$

よって ${}^\forall\epsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \geq \epsilon\right) &= P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \geq \epsilon n\right) \leq \frac{E[(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2]}{\epsilon^2 n^2} \\ &\leq \frac{nv}{\epsilon^2 n^2} = \frac{v}{\epsilon^2 n} \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

■

一般に確率変数 X_n, X に対して, ${}^\forall\epsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0$ $(n \to \infty)$ のとき, $X_n \to X$ in pr. と表し, X_n が X に**確率収束**するという. また $P(X_n \to X) = 1$ のとき, $X_n \to X$, P-a.s. と表し, X_n が X に**概収束**するという. (a.s. は almost surely の略)

問 1.2　"**概収束** $\Rightarrow$ **確率収束**", i.e., $X_n \to X$, P-a.s. $\Rightarrow$ $X_n \to X$ in pr. を示せ.

(ヒント　$P(X_n \to X) = 1 \iff$

$$P\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N}\left\{|X_n - X| < \frac{1}{k}\right\}\right) = 1 \iff P\left(\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

$$\iff {}^\forall k \geq 1, \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = P\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow {}^\forall k \geq 1, \lim_{N\to\infty} P\left(|X_N - X| \geq \frac{1}{k}\right) \leq \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

これは確率収束と同値 (即ち, $1/k$ を $\epsilon > 0$ に置き換えられる. 何故か？)

注意 1.1　一般に, 上の問の逆は成り立たない. 即ち, 確率収束しても概収束しない例が作れる. しかし, 確率収束していれば, 適当な部分列が概収束するようにとれることは知られている.

問 1.3　「確率収束なら適当な部分列に対して概収束」, i.e., ”$X_n \to X$ in pr. $\Rightarrow {}^\exists\{n_k\}; X_{n_k} \to X$ a.s.“ を示せ.

(ヒント　確率収束の仮定より, 次が分る (何故か?) ${}^\exists\{n_k\}$; $P\left(|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$. 和が収束することから Borel-Cantelli の補題が使えて $P\left(\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{k\geq N}\left\{|X_{n_k} - X| < \frac{1}{2^k}\right\}\right) = 1$. これから容易に分る.)

上の定理と同じ条件のもとで, もっと強い結果が成り立つ. それが次の定理である.

定理 1.4 (大数の強法則 (Strong Law of Large Numbers))　$X_1, X_2, \ldots$ を独立な確率変数で, 平均一定 $EX_n = m$, 分散が有界 $v := \sup_n V(X_n) < \infty$ であるとする. このとき次が成り立つ：

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) = 1.$$

注意 1.2　一般に, 平均が一定でない場合でも, 次が成り立つ.

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) = 0\right) = 1.$$

[証明の流れ]　まず $EX_n = 0$ として示せば良く, $\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n}(X_k/k)$ に対し,

(i) **Kolmogorov の最大不等式**より $\sup_{k\geq n}|\overline{S_k} - \overline{S_n}| \to 0$ $(n\to\infty)$ in pr.

(ii) 「確率収束なら適当な部分列に対して概収束」を用いれば,
確率 1 で $\{\overline{S_n}\}$ が Cauchy 列, 故に収束列.

(iii) **Kronecker の補題**より $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 0$ P-a.s.

という手順で証明することができる.

この証明を厳密に述べるのは大変なので, 少し条件を強めたもとで, 簡単な証明を与えよう.

[条件 $\sup E[X_n^4] < \infty$ のもとでの証明]

X_n の代わりに $\widetilde{X}_n = X_n - m$ を考えることにより，初めから $m = 0$, i.e., $E[X_n] = 0$ として示せばよい．まず $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4$ の展開式を考えるのだが，独立性と平均が 0 ということと，さらに $E[Y^2] \le (E[Y^4])^{1/2}$ が成り立つことに注意して，(これは分散が常に非負であること; $0 \le V(X) = E[(X-EX)^2] = E[X^2]-(EX)^2$ から直ぐ分る.)

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4\right] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k^4] + \sum_{i\neq j, 1\le i,j\le n} E[X_i^2]E[X_j^2] \le n^2 \sup_k E[X_k^4]$$

をえるから，**「非負確率変数の無限和と平均はいつでも交換可能」という Fubini の定理** を用いて

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4\right] \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sup_k E[X_k^4] < \infty$$

をえる．これは $P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) < \infty\right) = 1$, 即ち, $P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\right) = 1$ を意味する． ■

系 1.1 大数の法則の定理の条件の下, 任意の $\delta > 0$ に対し, 次も成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{1+\delta}}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - EX_k) = 0 \quad P\text{-a.s.}$$

では上で δ を 0 としたときにはどうなるのだろうか? この疑問に対する (適当な条件の下での) 答えを与えるのが次の中心極限定理である.

その前に正規分布を定義しておく.

$\mathbf{R}$ 上の確率測度 (これも単に**分布**という) $\mu(dx) = g(x)dx$ が

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}$$

で与えられるとき, これを平均 m, 分散 v の**正規分布 (normal dist.)**, あるいは**ガウス分布 (Gaussian dist.)** といい, それを表す記号として $N(m,v)$ を用いる.

ここで言葉を一つ解説しておく．確率変数 X, Y が同分布であるとは任意の $a \in \mathbf{R}$ に対し, $P(X \ge a) = P(Y \ge a)$ が成り立つときをいい, 記号で $X \overset{\text{(d)}}{=} Y$ と表す．($X = Y$ in the sense of distribution の意)

定理 1.5 (中心極限定理 (Central Limit Theorem)) 確率変数列 $\{X_n\}$ を独立同分布とする (independent identically distributed = i.i.d. と表す)．その平均 $EX_1 = m$, 分散 $V(X_1) = v$ とすると $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$ の分布は平均 0, 分散 v の正規分布 $N(0,v)$ に収束する, i.e., 任意の $a < b$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m) \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2v}} dx.$$

言い換えれば, $\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$ の分布は平均 0, 分散 1 の正規分布 $N(0,v)$ に収束する,

この定理の証明はここでは与えないが, 特性関数と呼ばれる, 確率測度の Fourier 変換＝特性関数を用いて, それが収束すると分布も収束するという事実を用いて証明される．(詳しくは講義ノート、「離散グラフ上のマルコフ過程」の補章を参照.)

2 ランダムウォーク (Random Walks)

ランダムウォークは日本語で「酔歩」というが, 確率過程の中でも, 最も単純なモデルで様々な性質が研究されている. 本講義では「酔っ払いは果たして家に帰り着くことができるか?」, 即ち, 「ランダムウォークは再帰的か?」という問題について議論する. もう少し正確には $d \geq 1$ を次元を表す自然数として, d 次元ランダムウォークの再帰性と過渡性の結果と証明について述べる.

$\mathbf{Z}^d$ $(\ni j = (j_1, \ldots, j_d))$ を d 次元**格子 (lattice)** という.

(X_n, P) が d 次元**単純ランダムウォーク (simple random walk)** であるとは, 毎回, $2d$ 個の隣接点から 1 点を等確率で選び, 進んで行く運動をいう. つまり $Y_n = X_n - X_{n-1}$ $(n \geq 1)$ とすると $\{X_0, Y_1, Y_2, \ldots\}$ は独立で, $\{Y_n\}$ は同分布をもち,

$$P(Y_n = k) = 1/(2d) \ (|k| = 1), \quad = 0 \ (|k| \neq 1)$$

をみたす. ここで $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $|k| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_d^2}$. また $\{X_0, Y_1, Y_2, \ldots\}$ が独立とは, 任意の自然数 n と $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{Z}$ に対し,

$$P(X_0 = k_0, Y_1 = k_1, \ldots, Y_n = k_n) = P(X_0 = k_0)P(Y_1 = k_1) \cdots P(Y_n = k_n)$$

をみたすときをいう.

一般に $\mathbf{Z}^d$ 上の分布 $\{p_k\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ $(p_k \geq 0, \sum p_k = 1)$ が与えられているとき, これを 1 歩の分布として運動する (X_n, P) を単に, d 次元**ランダムウォーク**という. つまり $P(Y_n = k) = p_k$ $(n \geq 1, k \in \mathbf{Z}^d)$ をみたしている. また $P_j(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) := P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n \mid X_0 = j)$ で P_j を定義して (X_n, P_j) を j を出発する d 次元ランダムウォークという.

注意 2.1 条件付確率 $P(A \mid B) := P(A \cap B)/P(B)$ は $P(B) > 0$ のとき定義されるので上の条件はそれも仮定に含まれているとみなす.

問 事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が独立 $\iff$ $P(A \mid B) = P(A)$ を示せ.

2.1 マルコフ連鎖 (Markov Chains)

確率過程とは時間とともにランダムに変化・運動していく対象を指すが, まずはランダムウォークよりは少し, 一般的な「マルコフ連鎖」と呼ばれる確率過程について解説する. 本節では次の結果を紹介する.

定理 2.1 可算集合 S に値をとる既約で時間的一様なマルコフ連鎖は正再帰的か, 零再帰的か, 過渡的のいずれかの状態になる.

さて数学が一般に嫌われるのは, 「同じ日本語なのに聞いていて, チンプンカンプンで理解不能だから」と良く言われるが, 初めて聞く人にとってはこれがまさにそうだろう. 原因は単純で, それは数学用語の定義が分っていないからである.

「既約」「時間的一様」「マルコフ連鎖」「正再帰的」「零再帰的」「過渡的」

マルコフ連鎖とは, 次にどう動くかが, 現在の状況のみに依存して, 過去には無関係であるようなものをいうが, いい加減な表現をすれば「行き当りばったりプロセス」あるいは「その場しのぎプロセス」といっても良いだろう. 正確な定義は次のとおりである.

S を有限または可算無限集合として, $(X_n, P) = (X_n(\omega), P(d\omega))$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が S に値をとる**確率過程 (Stochastic Processes)** とは, 各 $n \geq 0$ に対し, X_n が確率変数, i.e., ${}^\forall j \in S, \{X_h = j\} \in \mathcal{F}$. さらに (X_n, P) が次をみたすとき**マルコフ連鎖 (Markov Chain)** という:

(M1)　**[マルコフ性]**　$n \geq 1, j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, j, k \in S$ に対し,

$$P(X_{n+1} = k \mid X_0 = j_0, \ldots, X_{n-1} = j_{n-1}, X_n = j) = P(X_{n+1} = k \mid X_n = j).$$

さらに次の性質をみたすとき**時間的一様なマルコフ連鎖**という.

(M2)　**[時間的一様性]**　$n \geq 1, j, k \in S$ に対し,

$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = j) = P(X_1 = k \mid X_0 = j).$$

本講義では時間的一様でないものは扱わないので以下ではマルコフ連鎖といったときは全て, 時間的一様なマルコフ連鎖を指すものとする.

$n \geq 0, j, k \in S$ に対し, $q^{(n)}_{j,k} = P(X_n = k \mid X_0 = j)$ とおき, $Q^{(n)} = (q^{(n)}_{j,k})$ を n **階推移確率 (行列) (n-step transition probability (transition matrix))**, 特に, $Q^{(1)}$ を $Q = (q_{j,k})$ で表し, 単に, **推移確率 (行列)** という.

問 2.1　　次を示せ.

(i) $q^{(n)}_{j,k} \geq 0$, $\sum_k q^{(n)}_{j,k} = 1$ $(j \in S)$,

(ii) $n \geq 1$, $j_0, j_1, \ldots, j_n \in S$ に対して次の**一般化された時間的一様性**を示せ.

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n \mid X_0 = j_0) \\
&\quad = P(X_n = j_n \mid X_{n-1} = j_{n-1}) P(X_{n-1} = j_{n-1} \mid X_{n-2} = j_{n-2}) \cdots P(X_1 = j_1 \mid X_0 = j_0) \\
&\quad = q_{j_0,j_1} \cdots q_{j_{n-1},j_n} = P(X_{m+1} = j_1, \ldots, X_{m+n} = j_n \mid X_m = j_0)\ (m \geq 0)
\end{aligned}$$

(iii) $Q^{(0)} = I := (\delta_{jk})$ (単位行列), $Q^{(n)} = Q^n$ $(n \geq 1)$.　　ヒント $(Q^n)_{jk} = \displaystyle\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}} q_{j,j_1} q_{j_1,j_2} \cdots q_{j_{n-1},k}$

X_0 の分布 $\mu = \{\mu_j\}$; $\mu_j = P(X_0 = j)$ を**初期分布 (initial distribution)** といい, 特に, ある $j \in S$ に対し, $P(X_0 = j) = 1$ のとき確率 P を P_j で表し, (X_n, P_j) を j を出発するマルコフ連鎖という. (これは $P(X_0 = j) > 0$ のとき, $P_j(\cdot) := P(\cdot \mid X_0 = j)$ で定義するというのと同じことで, 実際に計算するときはこちらの方が都合が良い.)

注意 2.2　　P_{j_0} のもとでのマルコフ性は次のようになる: (最後の等式は次の問による)

$$\begin{aligned}
P_{j_0} z(X_{n+1} = k \mid X_0 = j_0, \ldots, X_{n-1} = j_{n-1}, X_n = j) &= P_{j_0}(X_{n+1} = k \mid X_n = j) \\
&= P_{j_0}(X_2 = k \mid X_1 = j) = q_{j,k}
\end{aligned}$$

問 2.2　　$P_{j_0}(\cdot) := P(\cdot \mid X_0 = j_0)$ のもと $P_{j_0}(X_2 = k \mid X_1 = j) = q_{j,k}$ を示せ.

問 2.3　　初期分布を $\mu = \{\mu_j\}$ とするとき, 次を示せ.

$$\text{(i) } P(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n) = \mu_{j_0} q_{j_0,j_1} \cdots q_{j_{n-1},j_n}, \quad \text{(ii) } P(X_n = k) = \sum_{j \in S} \mu_j q^{(n)}_{j,k}.$$

問 2.4　　(i) 事象列 $\{B_k\}_{k=1}^n$ が互いに素で, 事象 A, C に対し, $P(A \mid B_k) = P(A \mid C)$ $(1 \leq k \leq n)$ をみたしているとする. このとき $P(A \mid \bigcup B_k) = P(A \mid C)$ が成り立つことを示せ.

(ii) $m, n \geq 1$, $j_1, \ldots, j_m, k_0, k_1, \ldots, k_n \in S$ に対して

$$P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+m} = j_m \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) = q_{k_n,j_1} q_{j_1,j_2} \cdots q_{j_{m-1},j_m}$$

を示し (← 問 2.3 (i)), 更に次の**一般化されたマルコフ性**を示せ.

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+m} = j_m \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) \\
&\qquad = P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+m} = j_m \mid X_n = k_n).
\end{aligned}$$

今, $j \in S$ への**再帰時間 (recurrence time)**: T_j を次で定義する:

$$T_j = \inf\{n \geq 1; X_n = j\} \ (= \infty \quad \text{if } \{\cdot\} = \emptyset).$$

- j が**再帰的 (recurrent)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $P_j(T_j < \infty) = 1$,
- j が**過渡的 (transient)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $P_j(T_j < \infty) < 1$

と定義する. また j が再帰的のとき, T_j は有限な整数値となるが, さらに

- j が**正再帰的 (positive-recurrent)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $E_j[T_j] < \infty$ $(\Rightarrow P_j(T_j < \infty) = 1)$,
- j が**零再帰的 (null-recurrent)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $E_j[T_j] = \infty$, $P_j(T_j < \infty) = 1$

と定義する. ここで $E_j[T_j]$ は T_j の P_j のもとでの平均で, 次で定義される:

$$E_j[T_j] = \sum_{m=1}^{\infty} m P_j(T_j = m) + \infty \cdot P_j(T_j = \infty).$$

全ての j が再帰的 (or 正再帰的, 零再帰的, 過渡的) なら (X_n) は再帰的 (or 正再帰的, 零再帰的, 過渡的) であるという.

問 2.5 $E_j[T_j] < \infty \Rightarrow P_j(T_j < \infty) = 1$ を示せ.

マルコフ連鎖 $\{X_n\}$ あるいは推移確率 $Q = (q_{j,k})$ とある確率分布 $\pi = \{\pi_j\}$ に対して

- π が**定常分布 (stationary distribution)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_k = \sum_j \pi_j q_{j,k}$ $(k \in S)$,
- π が**可逆分布 (reversible distribution)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_k q_{k,j} = \pi_j q_{j,k}$ $(j, k \in S)$

と定義する.

問 2.6 可逆分布は定常分布であることを示せ.

問 2.7 次を示せ.
(i) 初期分布 π が定常分布なら, 全ての $n \geq 1$ に対し, X_n の分布も π となる.
(ii) 初期分布 π が可逆分布なら, $\{X_n\}$ は時間反転性をもつ: 任意の $n \geq 1, j_0, \ldots, j_n \in S$ に対し,

$$P(X_0 = j_0, \ldots, X_n = j_n) = P(X_0 = j_n, \ldots, X_n = j_0).$$

マルコフ連鎖 $\{X_n\}$ あるいは推移確率 $Q = (q_{j,k})$ が**既約 (irreducible)** であるとは任意の j, k に対し, ある $n \geq 1$ が存在し, $q_{j,k}^{(n)} > 0$ をみたすときをいう. つまり, どこから出発しても何ステップかで, どこへでもいける可能性があるということである. (もう少し分りやすくいうと, トラップと通過するだけの点, 絶対に行けない点がないということである.)

次の事実が時間的一様なマルコフ連鎖に対する, 本節のメインの結果である:

定理 2.2 $j, k \in S$ とする.
(i) j が再帰的という条件は次のそれぞれと同値:
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_{j,j}^{(n)} = \infty$.
b) $P_j(\{X_n\}$ は j に無限回戻る $) = 1$.

(ii) j が過渡的という条件は次のそれぞれと同値:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} q_{j,j}^{(n)} < \infty$.

b) $P_j(\{X_n\}$ は j に無限回戻る $) = 0$.

(iii) $\{X_n\}$ が既約なマルコフ連鎖なら, 再帰的か, 過渡的かのどちらかになるが, もっと詳しく正再帰的, 零再帰的, 過渡的のいずれかになる. さらに正再帰的となるための必要十分条件は定常分布 (π_j) [$^\forall k$, $\sum_j \pi_j q_{j,k} = \pi_k$] が存在することで, このとき $\pi_j = 1/E_j[T_j]$ で与えられる (従って定常分布は存在すれば一意にきまる).

まず (i), (ii) の b) について述べ, それから a) の判定定理, (iii) の前半について証明を与える. (iii) の正再帰性の判定定理の証明は最後の補章で述べる.

命題 2.1 (i) $j \in S$ が再帰的なら $P_j(\{X_n\}$ は j に無限回戻る $) = 1$.
(ii) $j \in S$ が過渡的なら $P_j(\{X_n\}$ は j に無限回戻る $) = 0$.

証明 直感的には理解できるであろう. 再帰的な場合は, 有限時間で戻る確率が 1 だから, 1 回目に戻ったときから考えれば, 再び有限時間で戻るからそれを繰り返せばよい. 過渡的な場合は戻る確率が 1 より小さいからそれを繰り返していけば, 確率は 0 に近づく. 厳密には m 回目に j に戻る時間を $T_j^{(m)}$ とおく.

$$T_j^{(1)} = T_j, \quad T_j^{(m)} = \min\{n > T_j^{(m-1)}; X_n = j\} \ (= \infty \quad \text{if } \{\cdot\} = \emptyset).$$

まず $P_j(T_j^{(m)} < \infty) = P_j(T_j < \infty)^m$ を示す. 自然数 s, t に対し, マルコフ性と時間的一様性を用いて,

$$P_j(T_j^{(m)} = s + t \mid T_j^{(m-1)} = s) = P_j(T_j = t)$$

が示せる. (実際, [左辺]$= P_j(X_{s+t} = j, X_{s+u} \neq j \ (1 \leq u \leq t-1) \mid T_j^{(m-1)} = s)$ で, $\{T_j^{(m-1)} = s\}$ が $\{X_1, \ldots, X_s\}$ の状態によって決まることと一般化されたマルコフ性 (問 2.4) に注意して, さらに一般化された時間的一様性 (問 2.1 (ii)) を用いれば [左辺]$= P_j(X_{s+t} = j, X_{s+u} \neq j \ (1 \leq u \leq t-1) \mid X_s = j) =$[右辺].) これから

$$P_j(T_j^{(m-1)} = s, T_j^{(m)} = s + t) = P_j(T_j^{(m-1)} = s) P_j(T_j = t)$$

をえる. よって

$$\begin{aligned} P_j(T_j^{(m)} < \infty) &= P_j(T_j^{(m-1)} < T_j^{(m)} < \infty) \\ &= \sum_{s=m-1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} P_j(T_j^{(m-1)} = s, T_j^{(m)} = s + t) \\ &= P_j(T_j^{(m-1)} < \infty) P_j(T_j < \infty) \end{aligned}$$

より, $P_j(T_j^{(m)} < \infty) = P_j(T_j < \infty)^m$ が分かる. これより

$$\begin{aligned} P_j(\{X_n\} \text{ は } j \text{ に無限回戻る}) &= P_j(\bigcap_m \{T_j^{(m)} < \infty\}) \\ &= \lim_{m \to \infty} P_j(T_j^{(m)} < \infty) \\ &= \lim_{m \to \infty} P_j(T_j < \infty)^m. \end{aligned}$$

これは $P_j(T_j < \infty) = 1$ なら 1, そうでないなら 0 である. ■

再帰的, 過渡的の判定定理の証明のためにまずいくつか記号を定義する. $j,k \in S$ に対し, $f_{j,k}^{(m)} := P_j(T_k = m)$ $(m \geq 1)$ とおき

$$Q_{jk}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} q_{j,k}^{(n)} s^n \quad (|s| < 1), \quad F_{jk}(s) := \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,k}^{(m)} s^n \quad (|s| \leq 1)$$

とおく. それぞれ $\{q_{j,k}^{(n)}\}_{n \geq 0}$, $\{f_{j,k}^{(m)}\}_{m \geq 1}$ の**母関数 (generating functions)** という.
$F_{jk}(1) = P_j(T_k < \infty)$ に注意せよ.

補題 2.1 $j,k \in S$ に対し, 次が成り立つ:

$$q_{j,k}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{j,k}^{(m)} q_{k,k}^{n-m} \ (n \geq 1), \quad Q_{jk}(s) = \delta_{jk} + F_{jk}(s) Q_{kk}(s) \quad (|s| < 1).$$

証明 $\{T_k = m\} = \{X_m = k, X_s \neq k \ (1 \leq s \leq m-1)\}$ に注意して

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n} f_{j,k}^{(m)} q_{k,k}^{(n-m)} &= \sum_{m=1}^{n} P_j(T_k = m) P_j(X_n = k \mid X_m = k) \\
&= \sum_{m=1}^{n} P_j(T_k = m) P_j(X_n = k \mid T_k = m) \\
&= \sum_{m=1}^{n} P_j(X_n = k, T_k = m) \\
&= P_j(X_n = k) \\
&= q_{j,k}^{(n)}.
\end{aligned}$$

またこれを用いて

$$\begin{aligned}
Q_{jk}(s) &= \delta_{jk} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{j,k}^{(n)} s^n \\
&= \delta_{jk} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} f_{j,k}^{(m)} q_{k,k}^{(n-m)} s^n \\
&= \delta_{jk} + F_{jk}(s) Q_{kk}(s).
\end{aligned}$$

■

命題 2.2 $j \in S$ が再帰状態 $\iff \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_{j,j}^{(n)} = \infty.$

証明 上の補題より $Q_{jj}(s)(1 - F_{jj}(s)) = 1$ $(|s| < 1)$ が成り立つから $F_{jj}(1) = P_j(T_j < \infty)$ と

$$\lim_{s \uparrow 1} Q_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{j,j}^{(n)} \leq \infty$$

に注意して $s \uparrow 1$ とすれば分かる. 形式的に次のように表せる:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_{j,j}^{(n)} (1 - P_j(T_j < \infty)) = 1.$$

■

問 2.8　上の証明を参考に $j \neq k$ のときを考えることにより

$$j \in S \text{ 過渡的 } \Rightarrow \sum_{n=0} q_{k,j}^{(n)} < \infty \ (^\forall k \in S)$$

が分かり, 逆に

$$^\exists k \in S;\ \sum_{n=0} q_{k,j}^{(n)} = \infty \ \Rightarrow \ j:\ \text{再帰的}$$

となることを示せ.　$(\sum_n q_{k,j}^{(n)} = F_{kj}(1) \sum_n q_{j,j}^{(n)}.)$

補題 2.2　j が再帰的のとき $j \to k$ [i.e., $^\exists n;\ q_{j,k}^{(n)} > 0$] なら $P_k(T_j < \infty) = 1$.

証明　まず, 任意の $i, j \in S$ に対して

$$P_i(T_j < \infty) = q_{i,j} + \sum_{k \in S; k \neq j} q_{i,k} P_k(T_j < \infty)$$

が示せる. (実際, マルコフ性と時間的一様性より

$$P_i(X_1 = k, T_j = n) = q_{i,k} P_k(T_j = n-1)$$

をえて

$$P_i(T_j < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in S} P_i(X_1 = k, T_j = n)$$

に代入することにより分かる.) そこで $i = j$ とすると j の再帰性より, $k_1; q_{j,k_1} > 0$ に対し, $P_{k_1}(T_j < \infty) = 1$ が分かる. 再び上の式より, $k_2; q_{k_1,k_2} > 0$, i.e, $q_{j,k_2}^{(2)} > 0$ に対し, $P_{k_2}(T_j < \infty) = 1$ が分かる. 今, 仮定の $q_{j,k}^{(n)} > 0$ より $^\exists(k_1, \ldots, k_{n-1});\ q_{j,k_1} q_{k_1,k_2} q_{k_2,k_3} \cdots q_{k_{n-1},k} > 0$ に注意して上の議論を繰り返せば, 題意をえる. ■

問 2.9　前の問 2.8 と上の補題から次が成り立つことを示せ:

$$j \text{ 再帰的, かつ } j \to k \ \Rightarrow \ \sum_{n=0} q_{k,j}^{(n)} = \infty.$$

$j, k \in S$ に対し $j \to k$ かつ $k \to j$ のとき $j \leftrightarrow k$ と表す.

命題 2.3　$j, k \in S; j \leftrightarrow k$ に対し, j が正再帰的, 零再帰的, 過渡的ならそれに応じて k もそうなる. 従って, 既約なマルコフ連鎖は正再帰的, 零再帰的, 過渡的のいずれかになる.

証明　仮定より $^\exists l, m \geq 0; q_{j,k}^{(l)} > 0, q_{k,j}^{(m)} > 0$. また

$$q_{j,j}^{(l+m+n)} \geq q_{j,k}^{(l)} q_{k,k}^{(n)} q_{k,j}^{(m)} \quad (n \geq 0)$$

より

$$Q_{jj}(s) \geq s^{l+m} q_{j,k}^{(l)} q_{k,j}^{(m)} Q_{kk}(s).$$

これからもし j が過渡的なら

$$\lim_{s \uparrow 1} Q_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{j,j}^{(n)} < \infty$$

で, 上のことから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_{k,k}^{(n)} < \infty$ をえて, k も過渡的となる. j, k を入れ替えても同じである.

次に正再帰性について考える．補題 2.1 の $Q_{jj}(s)(1-F_{jj}(s))=1$ より $F'_{jj}(s)=Q'_{jj}(s)/Q_{jj}(s)^2$．よって j を正再帰的とすると

$$\lim_{s\uparrow 1}\frac{Q'_{jj}(s)}{Q_{jj}(s)^2}=F'_{jj}(1-)=E_j[T_j]<\infty.$$

さらに上と同様に

$$\begin{aligned} Q_{kk}(s) &\geq s^{l+m}q_{k,j}^{(m)}q_{j,k}^{(l)}Q_{jj}(s), \\ Q'_{jj}(s) &\geq \sum_{n=0}^{\infty}(l+m+n)s^{l+m+n-1}q_{j,j}^{(l+m+n)} \\ &\geq s^{l+m}q_{j,k}^{(l)}q_{k,j}^{(m)}Q'_{kk}(s) \end{aligned}$$

が分かるので

$$\frac{Q'_{kk}(s)}{Q_{kk}(s)^2}\leq\frac{1}{s^{3(l+m)}(q_{j,k}^{(l)})^3(q_{k,j}^{(m)})^3}\frac{Q'_{jj}(s)}{Q_{jj}(s)^2}.$$

をえる．従って

$$E_k[T_k]=F'_{kk}(1-)=\lim_{s\uparrow 1}\frac{Q'_{kk}(s)}{Q_{kk}(s)^2}<\infty$$

となり k も正再帰的である．やはり j,k を入れ替えても同じである． ■

問 2.10　$k\in S$ が正再帰的のとき $E_k[T_k]=F'_{kk}(1-)$ を確かめよ．

注意 2.3　前の問 2.8, 2.9 で述べたことから既約なマルコフ連鎖に対しては

- 再帰的なら $^\forall j,k\in S$ に対し, $\sum_n q_{j,k}^{(n)}=\infty$.
- 過渡的なら $^\forall j,k\in S$ に対し, $\sum_n q_{j,k}^{(n)}<\infty$.

逆に, ある $j,k\in S$ に対し, $\sum_n q_{j,k}^{(n)}$ が無限なら再帰的となり, 有限なら過渡的となる.

2.2 d 次元ランダムウォーク (d-dimensional Random Walks)

(X_n,P) を d 次元ランダムウォークとする．即ち, $\{p_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ を $\mathbf{Z}^d$ 上の分布として, $\{X_0,X_1-X_0,X_2-X_1,\ldots\}$ が独立で, $P(X_n-X_{n-1}=k)=p_k$ $(n\geq 1,k\in\mathbf{Z}^d)$ をみたすとする．(特に $p_k=1/(2d)$ のとき単純ランダムウォークという.)

明かに, d 次元ランダムウォークはマルコフ連鎖である．しかもその推移確率 $Q=(q_{j,k})$ は $q_{j,k}=p_{k-j}$ で与えれる．また単純ランダムウォークは既約である．

問 2.11　このことを確かめよ．[マルコフ性, 時間的一様性, 推移確率, 既約性]

問 2.11 改　(X_n,P) を d 次元ランダムウォークとする．

(i) $X_{n+1}-X_n$ と $(X_0,X_1,\ldots,X_n)$ が独立であることを示せ, i.e.,

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1}-X_n=j,X_0=k_0,X_1=k_1,\ldots,X_n=k_n) \\ &= P(X_{n+1}-X_n=j)P(X_0=k_0,X_1=k_1,\ldots,X_n=k_n). \end{aligned}$$

特に $k_0,k_1,\ldots,k_{n-1}\in\mathbf{Z}^d$ で和をとることにより, $X_{n+1}-X_n$ と X_n が独立であることも分る.

(ii) $P(X_{n+1}=j\mid X_0=k_0,X_1=k_1,\ldots,X_n=k_n)=P(X_{n+1}=j\mid X_n=k_n)=p_{j-k_n}$ を示せ.
これから $\{X_n\}$ が時間的一様なマルコフ連鎖で, $q_{j,k}=p_{k-j}$ も分る.

(iii) 単純ランダムウォークは既約的であることを示せ. ($\|j-k\| := |j_1-k_1|+\cdots+|j_d-k_d|$ を用いて $j \neq k, j=k$ で分けて考える.)

従って, この $Q=(q_{j,k})=(p_{k-j})$ を用いて, 正再帰性, 零再帰性, 過渡性について議論することができる. まず、前節の結果を用いることにより, 単純ランダムウォークに関しては次のことが比較的容易に分る:

定理 2.3 d 次元単純ランダムウォークは

(i) $d=1,2$ なら零再帰的 (i.e., $E_j[T_j]=\infty$ かつ $P_j(T_j<\infty)$) であり,

(ii) $d \geq 3$ なら過渡的である.

ここでは 3 次元以下について示す.

まず既約性により (正・零) 再帰的か過渡的のいずれかに分れるから, $q_{0,0}^{(n)}$ の n についての和の収束・発散を調べればよい. $q_{0,0}^{(2n+1)}=0$ は明らかだから, $q_{0,0}^{(2n)}$ について考えればよい. そこで次を示す. (これにより再帰的か過渡的かは前節の定理 2.2 により判定できる.)

命題 2.4 d 次元単純ランダムウォークの推移確率 $Q=(q_{j,k})$ に対して

(i) $d=1,2$ のとき $n \to \infty$ なら

$$q_{0,0}^{(2n)} \sim \begin{cases} 1/\sqrt{\pi n} & (d=1) \\ 1/(\pi n) & (d=2) \end{cases}$$

(ii) $d=3$ なら適当な正の数 C に対して

$$q_{0,0}^{(2n)} \leq Cn^{-3/2}.$$

注意 2.4 実は, 一般に, 次の事実が知られている: ($d=3$ なら定数は $\sqrt{(3/\pi)^3}/4$)

$$q_{0,0}^{(2n)} \sim 2^{1-d}d^{d/2}(\pi n)^{-d/2} \quad (n \to \infty).$$

ここで $a_n \sim b_n\ (n \to \infty) \overset{\text{def}}{\iff} a_n/b_n \to 1\ (n \to \infty)$ である.

問 2.12 一般に正の値をとる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 対して, $a_n \sim b_n\ (n \to \infty)$ なら $^\exists c_1, c_2 > 0; c_1 b_n \leq a_n \leq c_2 b_n\ (^\forall n \geq 1)$ が成り立つこと示せ.

命題の証明で使う公式を述べておく.

[スターリングの公式 (Stirling's formula)] $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \quad (n \to \infty).$

命題 2.4 の証明

$d=1$ のときは次のことが容易に分るので, スターリングの公式より明らか:

$$q_{0,0}^{(2n)} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}.$$

$d=2$ のときは

$$q_{0,0}^{(2n)} = \sum_{j,k\geq 0; j+k=n} \frac{(2n)!}{(j!k!)^2} 4^{-2n} = \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k}^2 4^{-2n}$$

で, さらに $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$ を用いれば 1 次元の結果から分る.

$d=3$ のときは

$$q_{0,0}^{(2n)}=\sum_{j,k,m\geq 0;j+k+m=n}\frac{(2n)!}{(j!k!m!)^2}6^{-2n}$$

で, 3 項展開公式より

$$q_{0,0}^{(2n)}\leq c_n\frac{(2n)!}{n!}3^n6^{-2n}$$

をえる. ここで $c_n=\max_{j,k,m\geq 0;j+k+m=n}(j!k!m!)^{-1}$ である. さらにこの c_n に対し, 次が成り立つことから, 再びスターリングの公式を用いれば題意をえる.

$$c_n\leq c3^{n+3/2}n^{-n-3/2}e^n \qquad (c>0 \text{ は } n\geq 1 \text{ に無関係な定数}). \tag{1}$$

実際, n を 3 で割っていくつ余るかで場合分けして

$$c_n\leq\begin{cases}(m!)^{-3} & (n=3m)\\ (m!)^{-2}((m+1)!)^{-1} & (n=3m+1)\\ (m!)^{-1}((m+1)!)^{-2} & (n=3m+2)\end{cases} \tag{2}$$

が分るので, スターリングの公式より, ある定数 $c_1,c_2>0$ が存在して

$$c_1n^{n+1/2}e^{-n}\leq n!\leq c_2n^{n+1/2}e^{-n}$$

をみたすので上に代入すればよい. ■

問 2.13 1 次元と 2 次元のときにスターリングの公式を用いて計算せよ.

問 2.14 上の式 (2) を示し, それを用いて (1) を導き, $d=3$ の証明 (計算) を確かめよ.

$d=1,2$ のとき再帰的であることは分かったが, それが零再帰的であるを示す.

命題 2.5 $d=1,2$ のとき $\mathbf{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークは零再帰的 (i.e., $E_0[T_0]=\infty$) である.

補題 2.3 (i) $\alpha>-1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}s^n\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-s)^{\alpha+1}}\quad(s\uparrow 1).$$

(ii) $\alpha=-1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}s^n=\log\frac{1}{1-s}.$$

証明 $\alpha>-1$ のときは $\log(1/s)\sim 1-s$ $(s\uparrow 1)$ と次の積分との比較により容易に分かる:

$$\int_0^{\infty}x^{\alpha}s^xdx=\left(\log\frac{1}{s}\right)^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1).$$

$\alpha=-1$ のときは log のテイラー展開. ■

命題 2.5 の証明

命題 2.3 の証明で示したように $F'_{00}(s) = Q'_{00}(s)/Q_{00}(s)^2$ であるから, $d=1$ のとき, $q_{0,0}^{(2n)} \sim 1/\sqrt{\pi n}$ $(n \to \infty)$ より, 上の補題を用いて $s \uparrow 1$ のとき

$$Q_{00}(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^{2n} q_{0,0}^{(2n)} \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2)}{(1-s^2)^{1/2}},$$

$$Q'_{00}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n s^{2n-1} q_{0,0}^{(2n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2n s^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(3/2)}{(1-s^2)^{3/2}}.$$

よって

$$F'_{00}(s) = \frac{Q'_{00}(s)}{Q_{00}(s)^2} \sim \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)^2} \frac{1}{s\sqrt{1-s^2}} \quad (s \uparrow 1).$$

ゆえに

$$E_0[T_0] = \lim_{s \uparrow 1} F'_{00}(s) = \infty.$$

$d=2$ なら $q_{0,0}^{(2n)} \sim 1/(\pi n)$ $(n \to \infty)$ より, 同様に $s \uparrow 1$ のとき

$$Q_{00}(s) \sim \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{1-s^2},$$

$$Q'_{00}(s) \sim \frac{2}{\pi s(1-s^2)} \sim \frac{2}{\pi(1-s^2)}$$

から

$$E_0[T_0] = \lim_{s \uparrow 1} 2 \left[\pi(1-s^2) \left(\log \frac{1}{1-s^2} \right)^2 \right]^{-1} = \infty.$$

■

2.3 1 次元非対称ランダムウォーク (One-dimensional Anti-symmetric Random Walks)

1 次元非対称単純ランダムウォーク

$\mathbf{Z}^1$ 上のランダムウォーク $\{X_n\}$ で右へ 1 歩進む確率を p $(0<p<1)$, 左へ 1 歩進む確率を $1-p$ とする. $p \neq 1/2$ のとき, この $\{X_n = X_n^{(p)}\}$ を **1 次元非対称単純ランダムウォーク**という.

注 前に d 次元単純ランダムウォークを定義したが, 正確には d **次元回転不変単純ランダムウォーク**と呼ぶべきで, ただ**「単純」**といったときには隣接する点にしか移りえないとき (つまりそれ以外へ行く確率が 0 のとき) をさす.

1 次元非対称単純ランダムウォークの推移確率は

$$q_{j,j+1} = q_{0,1} = p, \quad q_{j,j-1} = q_{0,-1} = 1-p$$

で, さらに n 階推移確率は

$$q_{j,k}^{(n)} = \begin{cases} \displaystyle\binom{n}{\frac{n+j-k}{2}} p^{(n-j+k)/2}(1-p)^{(n+j-k)/2} & (n+j-k \in 2\mathbf{Z}) \\ 0 & (n+j-k \in 2\mathbf{Z}+1). \end{cases}$$

問 2.15 これを説明せよ. [**ヒント** $+1$ へ l 回, -1 へ m 回として, $l+m=n$. また $l-m=k-j$.]

そこでスターリングの公式を用いれば

$$\begin{aligned} q_{0,0}^{(2n)} &= \binom{2n}{n}(p(1-p))^n \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4p(1-p))^n \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

問 2.16　これを確かめよ.

$p \neq 1/2$ より $4p(1-p) < 1$ に注意して次をえる:

定理 2.4　1 次元非対称単純ランダムウォーク $\{X_n = X_n^{(p)}\}$ $(0 < p < 1, p \neq 1/2)$ は過渡的である.

実際, 増分 $Y_n := X_n - X_{n-1}$ の平均 $EY_n = 2p-1$ で, 大数の法則から次をみたす:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 2p-1\right) = 1.$$

即ち, 確率 1 で, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し, ある番号 N から先, $^\forall n \geq N$, $(2p-1-\varepsilon)n < X_n < (2p-1+\varepsilon)n$ をみたす.

問 2.17　$p > 1/2$ のとき $j \geq 1$ に対し, $u_j(s) := F_{j0}(s) = \sum_{m\geq 1} s^m P_j(T_0 = m)$ $(0 < s < 1)$ とおくと

$$\begin{aligned} u_1(s) &= psu_2(s) + (1-p)s \\ u_j(s) &= psu_{j+1}(s) + (1-p)su_{j-1}(s) \quad (j \geq 2) \end{aligned}$$

と $\displaystyle\lim_{j\to\infty} u_j(s) = 0$ をみたすことを説明し, この差分方程式を解けば,

$$F_{j0}(s) = \left(\frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)s^2}}{2ps}\right)^j \quad (0 < s < 1)$$

をえることを示せ. さらに

$$P_j(T_0 < \infty) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^j \quad (j \geq 1)$$

を示せ.

[**ヒント**　$\{X_1 = j+1\}, \{X_1 = j-1\}$ で分けて考えれば良い. 実際,

$$P_j(T_0 = m) = P_j(T_0 = m \mid X_1 = j+1)P_j(X_1 = j+1) + P_j(T_0 = m \mid X_1 = j-1)P_j(X_1 = j-1)$$

で, $P_j(T_0 = m \mid X_1 = j-1)$ は $j \geq 2$ なら $P_{j-1}(T_0 = m-1)$ で, $j = 1$ なら $P_1(T_0 = m \mid X_1 = 0) = \delta_{1m}$ となることに注意. 即ち,

$$P_j(T_0 = m) = \begin{cases} pP_{j+1}(T_0 = m-1) + (1-p)P_j(T_0 = m-1) & (j \geq 2) \\ pP_2(T_0 = m-1) + (1-p)\delta_{1m} & (j = 1) \end{cases}$$

また $\lim_{j\to\infty} P_j(T_0 = m) = 0$ $(^\forall m \geq 1)$. さらに $psx^2 - x + (1-p)s = 0$ の解を $x = \alpha, \beta$ $(\alpha < \beta)$ とすると, $0 < \alpha < 1 < \beta$ で ($|2ps-1| < \sqrt{1-4p(1-p)s^2}$ による)

$$\begin{aligned} &u_2 - \alpha u_1 = \beta(u_1 - \alpha), && u_2 - \beta u_1 = \alpha(u_1 - \beta) \\ &u_{j+1} - \alpha u_j = \beta(u_j - \alpha u_{j-1}), && u_{j+1} - \beta u_j = \alpha(u_j - \beta u_{j-1}) \quad (j \geq 2) \end{aligned}$$

より, これを解くと $u_j = (\beta^j(u_1 - \alpha) - \alpha^j(u_1 - \beta))/(\beta - \alpha)$ で $j \to \infty$ とすれば $u_1 = \alpha$ をえる.]

問 2.18　$u_j := P_j(T_0 < \infty)$ $(j \in \mathbf{Z})$ とおく. 大数の法則から $p > 1/2$ なら $j \leq -1$ に対し, $u_j = P_j(T_0 < \infty) = 1$ となるが, $j = 0$ のとき $u_0 = pu_1 + (1-p)$ をみたすことを説明し, 上の問から $P_0(T_0 < \infty) = u_0 = 2(1-p) < 1$ で与えられることを示せ.

3　補章

本章では本文で証明を与えなかった部分についてその証明を述べる．但し, ここでは「ルベーグ積分論」の知識を必要とする．

3.1　マルコフ連鎖の正再帰性の判定定理 (定理 2.2 (iii)) の証明

命題 3.1　既約なマルコフ連鎖が正再帰的 $\iff$ 定常分布をもつ．このとき定常分布 $\pi = (\pi_j)$ は $\pi_j = 1/E_j[T_j] > 0$ で与えられ, 一意に決まる．

証明　まず $^\forall i, j \in S$ に対し, 補題 2.1 より $Q_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s)Q_{jj}(s)$ であったから

$$\lim_{s\uparrow 1}(1-s)Q_{jj}(s) = \lim_{s\uparrow 1}\frac{1-s}{1-F_{jj}(s)} = \frac{1}{F'_{jj}(1-)} = \frac{1}{E_j[T_j]}.$$

さらに $i \neq j$ なら

$$\lim_{s\uparrow 1}(1-s)Q_{ij}(s) = \frac{F_{ij}(1)}{E_j[T_j]}.$$

今, 正再帰的であると仮定すると補題 2.2 より $F_{ij}(1) = P_i(T_j < \infty) = 1$ となるので $^\forall i, j \in S$ に対し,

$$\lim_{s\uparrow 1}(1-s)Q_{ij}(s) = \frac{1}{E_j[T_j]}\ (=: \pi_j \quad \text{とおく}).$$

$1 \leq E_j[T_j] < \infty$ より $0 < \pi_j \leq 1$. $\displaystyle\sum_{j\in S}(1-s)Q_{ij}(s) = 1$ に注意して Fatou の補題を用いると $\displaystyle\sum_{j\in S}\pi_j \leq 1$ で, さらに $k \in S$ に対し,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in S}\pi_j q_{j,k} &\leq \liminf_{s\uparrow 1}\sum_{j\in S}(1-s)Q_{ij}(s)q_{j,k} \\
&\leq \lim_{s\uparrow 1}(1-s)\sum_{n=0}^{\infty}s^n q_{i,k}^{(n+1)} \\
&= \lim_{s\uparrow 1}(1-s)s^{-1}(Q_{ik}(s)-\delta_{ik}) \\
&= \pi_k
\end{aligned}$$

をえるが, 両辺の k についての和が等しいことから実は

$$\sum_{j\in S}\pi_j q_{j,k} = \pi_k \quad (k \in S)$$

が成り立つ．よって

$$\sum_{j\in S}\pi_j(1-s)Q_{jk}(s) = (1-s)\sum_{n=0}^{\infty}s^n\sum_{j\in S}\pi_j q_{j,k}^{(n)} = \pi_k. \tag{3}$$

$s \uparrow 1$ として Lebesgue の収束定理を用いると $\displaystyle\sum_j \pi_j\pi_k = \pi_k$ をえるから $\displaystyle\sum_j \pi_j = 1$ となる．以上から $\pi = (\pi_j)$ は定常分布となる．

次に $\pi = (\pi_j)$ を任意の定常分布とすると, 式 (3) が成り立つので $s \uparrow 1$ として

$$\pi_k = \sum_{j\neq k}\pi_j\frac{F_{jk}(1)}{E_k[T_k]} + \pi_k\frac{1}{E_k[T_k]} \leq \frac{1}{E_k[T_k]}$$

をえる．ここで $^{\exists}k; \pi_k > 0$ より $E_k[T_k] < \infty$ となり, 正再帰的であることが分かる．このことから実はすべての $k \in S$ に対して $E_k[T_k] < \infty$ で, しかも補題 2.2 から $F_{jk}(1) = P_j(T_k < \infty) = 1$ $(^{\forall}j, k \in S)$ となり, 上の式が等号で成り立つことがいえる．即ち, $\pi_k = 1/E_k[T_k] > 0$ $(k \in S)$. 従って $\pi = (\pi_j)$ は一意的に定まる． ■

問 3.1 Fubini の定理を用いて $\displaystyle\sum_{j \in S}(1-s)Q_{ij}(s) = 1$ を確かめよ．

問 3.2 上の証明で Fatou の補題と Lebsgue の収束定理をどのように用いたか正確に説明せよ．

参考文献

[1] 志賀　徳造, 「ルベーグ積分から確率論」(共立出版), 2000 年.

4 確率論の応用 ; その他の話題 (Applicatons of Probability Thoery; Other Topics)

本章では, 良く知られた「ギャンブラーの破産問題」と, 少し変った話題として, 「クイズショー」と「囚人のジレンマ」と呼ばれる問題についても解説しよう．

4.1 破産問題 (Ruin problem)

A, B の 2 人が, それぞれ所持金 a 万円, b 万円を持って, 賭けを行う．1 回の賭けで, A が勝てば, B から 1 万円を貰い, 負ければ逆とする．1 回ごとの賭けで A が勝つ確率は $0 < p < 1$ とする．即ち, 負ける確率は $q = 1 - p$ となる．この賭けを続けて, どちらかの所持金が 0 円になったときに, このゲームは終わるとする．A が破産する確率 P_A を求めよう．

その前にもう一つ問題として, 共に破産しない, つまりゲームが永遠に続く確率 P_∞ はいくつだろうか? 直感的には $P_\infty = 0$ だと思えるであろうが, そんなに明らかではない．これについても考察する．

まず, 結果は次のようになる．

定理 4.1 (1) $p = 1/2$ のとき．

$$P_A = \frac{b}{a+b}, \quad P_B = \frac{a}{a+b}.$$

(2) $p \neq 1/2$ のとき．$r := q/p = 1/p - 1$ $(\neq 1)$ とおく．

$$P_A = \frac{r^a - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}}, \quad P_B = \frac{1 - r^a}{1 - r^{a+b}}.$$

(3) 上の結果から, $P_\infty = 0$, 即ち, ゲームは永遠には続かない, つまり, 必ずどちらかは破産する．

所持金 a 万円の A が破産する確率を u_a と表すことにする．このとき最初の賭けで勝つか負けるかで条件付けることにより, 次の式を満たすことが分る．

$$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1} \quad (a \geq 1), \qquad u_0 = 1,\ u_{a+b} = 0. \tag{4}$$

問 4.1 上の式を証明せよ．

ヒント　まず, 最後の 2 式は明らかであろう. 所持金が初めから 0 なら, 既に破産状態なので, 破産確率は 1 で, 所持金が初めから $a+b$ なら, B が破産状態なので, 破産確率は 0 ということである. 最初の式も, 直感的には明らかに思えるかも知れないが, 厳密には次のように証明できる. Y_n を n 回目の掛けで, A が受け取る金額（単位は万円）, 即ち, A が勝てば $Y_n = 1$. 負ければ $Y_n = -1$ とする, i.e., $P(Y_n = 1) = p$, $P(Y_n = -1) = q$. また $X_0 = a$ として, $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n Y_k$ $(n \geq 1)$ とすると, これは A の n 回目の賭けが終わった時点での所持金を表す.

$$T_0 = \inf\{n \geq 0; X_n = 0\},\ T_{a+b} = \inf\{n \geq 0; X_n = a+b\}$$

に対し,

$$u_a = P_a(T_0 < T_{a+b}) = P(T_a < T_{a+b} \mid X_0 = a).$$

従って, $Y_1 = \pm 1 \iff X_1 = a \pm 1$ （複号同順）に注意すれば,

$$\begin{aligned} P_a(T_0 < T_{a+b}) &= P_a(T_0 < T_{a+b} \mid Y_1 = 1)P_a(Y_1 = 1) + P_a(T_0 < T_{a+b} \mid Y_1 = -1)P_a(Y_1 = -1) \\ &= P_{a+1}(T_0 < T_{a+b})P(Y_1 = 1) + P_{a-1}(T_0 < T_{a+b})P(Y_1 = -1). \end{aligned}$$

これより, 最初の漸化式が得られる.

問 4.2 定理 4.1 を証明せよ.

ヒント　漸化式 (4) より, $a \geq 1$ のとき,

$$u_{a+1} - u_a = (q/p)(u_a - u_{a-1}) = r^a(u_1 - u_0).$$

これより, $1 \leq n \leq a+b$ に対し,

$$u_n - u_0 = \sum_{k=1}^n r^{k-1}(u_1 - u_0) = \begin{cases} n(u_1 - u_0) & (r = 1) \\ \frac{1-r^n}{1-r}(u_1 - u_0) & (r \neq 1) \end{cases}$$

特に, $n = a+b$ として, 境界条件, $u_0 = 1, u_{a+b} = 0$ を用いて, $u_1 - u_0 = -1/(a+b)$ if $r = 1$, $= -(1-r)/(1-r^{a+b})$ if $r \neq 1$. 従って, $u_a = 1 - a/(a+b) = b/(a+b)$ if $r = 1$, $= 1 - (1-r^a)/(1-r^{a+b}) = (r^a - r^{a+b})/(1-r^{a+b})$ if $r \neq 1$.

さらにゲームが終わる（＝どちらかが破産する）までの平均回数を求めることもできる. 実際, N をゲームが終わったときの賭けの回数＝破産時刻として, B の所持金は b 万円で固定して, $v_a = E_a[N]$ を A が所持金 a 万円でゲームをスタートした場合の破産時刻の平均とおくと, これも最初の賭けで A が勝つか負けるかで条件付けることにより次を満たすことが分かる.

$$v_n = 1 + pv_{n+1} + qv_{n-1} \quad (1 \leq a \leq a+b-1),\ v_0 = v_{a+b} = 0.$$

これを解くことにより, 次を得る.

$$v_a = ab \quad (r = 1), \qquad \frac{1}{p-q}\left\{(a+b)\frac{1-r^a}{1-r^{a+b}} - a\right\} \quad (r \neq 1).$$

問 4.3 上の計算を確かめよ.

ヒント　$r = 1$ のときは, $(v_{a+1} - v_a) - (v_a - v_{a-1}) + 2 = 0$ より, $\Delta v_a = v_a - v_{a-1}$ $(a \geq 1)$ とおくと, $\Delta v_{a+1} - \Delta v_a + 2 = 0$. これを $a = 1$ から n まで足し合わせると, $\Delta v_{n+1} - \Delta v_1 + 2n = 0$. 即ち, $\Delta v_{n+1} = \Delta v_1 - 2n = v_1 - 2n$. ($v_0 = 0$ を用いた.) さらに $v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \Delta v_k = (n+1)(v_1 - n)$. つまり, $v_n = n(v_1 - (n-1))$. これで, $0 = v_{a+b} = (a+b)(v_1 - (a+b-1))$ から $v_1 = a+b-1$. 従って, $v_a = a(v_1 - (a-1)) = ab$ をえる.

$r \neq 1$ のとき. $p\Delta v_{a+1}+1=q\Delta v_a$ より, $pv+1=qv$ を解いて, $v=1/(q-p)$. 従って, $p(\Delta v_{a+1}-v)=q(\Delta v_a-v)$. これから $\Delta v_{a+1}-v=(q/p)(\Delta v_a-v)=r^a(\Delta v_1-v)$. 即ち, $\Delta v_a - v = r^{a-1}(v_1-v)$. ($v_0=0$ を用いた.) さらに

$$v_a=\sum_{k=1}^{a}\Delta v_a = av+\sum_{k=1}^{a} r^{k-1}(v_1-v)=av+\frac{1-r^a}{1-r}(v_1-v).$$

これで

$$0=v_{a+b}=(a+b)v+\frac{1-r^{a+b}}{1-r}(v_1-v) \quad \text{から,} \quad v_1-v=-(a+b)v\frac{1-r}{1-r^{a+b}}$$

従って,

$$v_a=av-(a+b)v\frac{1-r^a}{1-r^{a+b}}=v\left(a-(a+b)\frac{1-r^a}{1-r^{a+b}}\right).$$

これから $r=1$, 即ち, $p=q=1/2$ のとき, $a=1, b=100$ とすると, A の破産する確率 $P_A=100/101$ だが, 平均回数は 100 となり, 1 回でゲームが終わる確率が 1/2 であることを考えると結構な数である.

4.2 クイズショー

テレビのクイズ番組で, 優勝者が最後に, 3 つのドアから一つを選び, その中に, 車があればそれを貰える. 但し, 車は 1 台だけで, 残りの 2 つドアの向こうには何も無く, 外せば何も貰えない. さらにドアを一つ選んだ時点で, 司会者は残りのドアの内, 外れのドアを 1 つ開け, 選択を変えるかどうかを迫るという設定である. 問題は, **「このとき, 選択を変えるべきかどうか？」**である。

考え方の一つとして, 最初は確率 1/3 で当たりだが, ドアが一つ開いた時点で, 選択は 2 つになり, 当たる確率はどちらのドアも 1/2 に上がったと思える. しかし, 選択しなかった 2 つのドアの少なくとも 1 つは外れで, それを開けたからと言って, 自分の選択したドアが当たりなのか外れなのかは, 全く関係が無いように思える.

答えは、**「選択を変えた方が良い」** で, 実は選択を変えることにより, 当たる確率は上がるのである. 最初の選択のままでは当たる確率は 1/3 のままで, 選択を変えると, 2/3 になるのである.

なぜ, 1/2 では無いのか？これはこれで不思議な気がするかも知れないが, 最初に選んだドアは 3 つの内の 1 つなので, 1/3 のままであるが, ドアを開けた時点で選択を変えるということは, 実は, 最初に, 残りの 2 つのドアを選んだのと同じことになり, その内の外れのドアを開けた所で, 確率は 2/3 のまま変わらないということなのである. 但し, これは, 外れのドアを開ける司会者の癖など (の情報) が全くない場合である.

熊谷隆著「確率論」では, 司会者の開けるドアについての癖を条件付確率で導入し, その確率に応じて当たる確率は変わるが、やはり選択を変えた方が良いという結論を得ていて, こちらの方が, 数学としては, 厳密な答えになる. 確かに、司会者の癖が分れば、外れのドアを開けた時点で、当たりのドアが分る場合もあるというのは、十分ありえる話である. 勿論、そのためには、既に、この番組が何度も放送されていて, それから司会者の癖の確率が分った場合である. (勿論、答えには, 癖が無い場合も含まれているので, 数学の答えとしては, より一般的な答えになっているといえる.)

4.3 囚人のジレンマ (Prisoner's Dilemma)

ウィキペディアによると, 一般に言われる「囚人のジレンマ」とは, 共同で犯罪を行った 2 人の容疑者に自白をさせるために,

(i) 共に黙秘なら, 2 人とも懲役 2 年

(ii) 1 人だけが自白した場合は, 自白した方は釈放し,　黙秘した方は懲役 10 年

(iii) 2 人とも自白した場合は, 共に懲役 5 年

という条件を提示すると, 2 人とも自白し, それぞれ懲役 5 年になるというものである.

しかし, 確率論において, 前述の熊谷隆氏の本で紹介されているのは,

> A, B, C の 3 人の死刑囚がいて, そのうち 2 人が明日, 死刑になることが囚人にも知らされているとする. 但し, 誰かは知らされていない. そこで, 囚人 A が看守に「明日、B か C のどちらが死刑になるのか教えて欲しい。」と頼み、看守は、「B は死刑になる」と教えた所, A は喜んで, 「自分が明日執行される確率が 2/3 から 1/2 に減った。」と喜んだという。これは変な話ではないのか?

というものである. 確かに A からみれば, 自分以外の少なくとも 1 人は死刑になるのは明らかで, それを知った所で, 自分の状況が変わる筈はないのに, 確率を考えると, 知った時点で, 死刑になる確率が減ったことになる. これは確率論という理論自体がおかしいということになるのではないか?「囚人のジレンマ」というよりは「確率論者のジレンマ」とでもいうべき、問題ではないか?

実は, この話は, 確率論者の中でも, 意見が分かれていて, 「正しい」という人もいれば, 「間違っている」という人もいる.

例えば, 仮に, 明日死刑になる者をクジ引きで決めていたとして, B が既にクジを引き, 死刑が決まり, まだ A も C も引いていなければ, 確かに A の言うことは正しい. しかし, 仮に C もクジを引いてしまっていれば, 既に, どうなるかは確定していて, それが A には知らされていないだけということになるので, 間違っているということになるだろう.

私個人の意見としては, 「この問題を確率で考えること自体が間違っている」という意見なのだが。実際, 誰が明日死刑になるかは, 既に決まっていて, それをいくら A にはまだ, 分っていないからといって, それを確率で考えるのはおかしく, それでも, 敢えて確率で言うなら, A が死刑になるかどうかの確率は 0 か 1 のどちらかしかないのである.