解析学 I (Analysis I)

Lebesgue 積分論

(Lebesgue Integral Theory) [1]

平場　誠示 (Seiji HIRABA)

[1]参考書　「ルベーグ積分入門」　吉田　伸生　著　(遊星社), 「測度・積分・確率」　梅垣, 大矢, 塚田共著　(共立出版)

目 次

1　導入 (Introduction)

どんな集合でもその長さを測ることができるのだろうか?　また点の長さは 0 なのに, その集まりである $[0, 1]$ 区間の長さは 1 だという. これは矛盾しないのだろうか?

その素朴な疑問に答えるのが, 「**測度論 (Measure Theory)**」である. そこでは, 我々が普段、『長さ』と呼んでいるものが実は, **Lebesgue 測度**と呼ばれるもので測ったものであり, 集合には長さを測れるもの (**可測集合**) とそうでないもの (**非可測集合**) があることを学ぶ. さらにそおの測度論を元に, Riemann 積分の発想を逆転した, **Lebesgue 積分** を定義することができる. この理論において, 目玉となるのが, 関数の極限と積分の順序交換がどんな条件のもとでできるかを与える **Lebesgue の収束定理 (Lebesgue's Convergence Theorem)** と累次積分の順序交換ができるための条件を与える **Fubini の定理 (Fubini's Theorem)** である. これらの定理は非常に有効で, 本講義の第一の目的はこれらの定理を理解し, 使いこなせるようにすることにある.

また測度論は「**確率論 (Probability Theory)**」とも深いつながりがあり, 第二の目的は確率論を通して, Lebesgue 積分論が単なる Riemann 積分論の焼き直しにとどまらず, さらに広い, 深い世界を展開するということを少しでも紹介できればと思っている.

1.1　測度とは何か?

長さ (面積・体積) を測るものとして**測度 (measure)** という概念がある. これは一体何のために導入されたのであろうか?

例えば, 高校までに 1 点の長さは 0 として, 区間 $[0, 1]$ の長さは 1 として習って来たであろう. では次の計算はどこがおかしいのだろうか? (ここでは長さを $|\cdot|$ を用いて表す.)

$$1 = |[0, 1]| = \sum_{x \in [0,1]} |\{x\}| = 0.$$

区間 $[a, b]$ $(a < b)$ の長さを $b - a$ と定義するのは問題ないであろう. では 1 点の長さを 0 とするのがまずいのであろうか? しかしこれを正とすると, 場所に寄って長さが変わるというのは考えにくいので, 全て同じ値として, それを無限にたすと無限大になり, $1 = \infty$ となってしまう. それに $|\{x\}| \le |[x, x + 1/n]| = 1/n \to 0$ $(n \to \infty)$ から $|\{x\}| = 0$ とするのも妥当であろう.

答えは, 実は, **上の足し算がまずい**のである. 我々に許される足し算は有限和の極限としての無限和, 即ち, 可算までなのである. **無限和＝可算無限和＝有限和の極限**.

問 1.1　$\bigcap_{n \ge 1} [x, x + 1/n] = \{x\}$ を示せ.

問 1.2　自然数の全体 $\mathbf{N}$ と対等な (全単射な写像が存在する) 集合の濃度を**可算 (countable)** というが, 有理数全体 $\mathbf{Q}$ の濃度が可算, 実数全体 $\mathbf{R}$ の濃度が非可算であることの証明の概略を述べよ.

またどんな集合でも長さは測れるのだろうか? この議論はかなり深い内容を含んでいるが, 実は選択公理を用いると長さの測れない集合を作ることができる. (**非可測集合の存在**) では長さの測れる集合 (**可測集合**) とはどのようなものであろうか? それが **Lebesgue 可測集合** と呼ばれるもので, その全体を $\mathcal{L}$ で表すと, 次の性質をみたす.

(1) $\emptyset \in \mathcal{L}$,

(2) $A \in \mathcal{L}$ なら $A^c \in \mathcal{L}$,

(3) $A_n \in \mathcal{L}, n = 1, 2, \ldots$ なら $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{L}$.
さらに次の性質ももつ.
(4) $[a, b] \in \mathcal{L}$ $(a < b)$,
(5) $A \in \mathcal{L}; |A| = 0$ なら ${}^{\forall}B \subset A, B \in \mathcal{L}$,
この集合族 $\mathcal{L}$ の上で定義され, $m([a, b]) = b - a$ $(a < b)$ をみたし, さらに次の性質をもつ集合関数 $m : \mathcal{L} \to [0, \infty]$ を **Lebesgue 測度** という.
(1) $m(\emptyset) = 0$
(2) $A_n \in \mathcal{L}$ が互いに素なら $m(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} m(A_n)$.
$m(A) = |A|$ や形式として $m = m(dx) = dx$ などと表すこともある.

測度とはこのように測れる集合や許される演算などを明確にし, 長さというものをより厳密にし, さらに一般化したものを表すのである.
大事なことは, 全ての演算が可算無限までしか許されないということである.

1.2 Riemann 積分から Lebesgue 積分へ

測度の概念を用いて Lebesgue 積分が定義されるのだが, まず Riemann 積分について復習しよう.

定義 1.1 区間 $[a, b]$ $(a < b)$ 上の有界な関数 $f(x)$ に対し, 区間の任意の分割 $\triangle = \{x_k\}_{k=1}^n; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を考え,

$$S(\triangle) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x_k - x_{k-1}), \quad s(\triangle) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x_k - x_{k-1})$$

と定義する. $\inf_{\triangle} S(\triangle) = \sup_{\triangle} s(\triangle)$ のとき, この値を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と表し, f の **Riemann 積分**と呼び, また f は **Riemann 積分可能**であるという. このとき特に $x_k = a + (b - a)k/n$ ととると

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b - a)\right).$$

さてこの Riemann 積分は 1, 2 年の解析でやってきたように関数 f が具体的な場合に計算ができ, 非常に便利であった. しかし, 問題はこの積分のできる関数 f が非常に限られているということである. 大抵, 連続性ぐらいは必要で、それ以外の関数については積分を考えることができなかった.

問 1.3 $f(x)$ を $[0, 1]$ 上の, 有理数で 0, 無理数で 1 とすると Riemann 積分不可能であることを示せ.

しかし前の測度のところで述べたことから $|[0, 1] \cap \mathbf{Q}| = 0$ となるので. $|[0, 1] \cap \mathbf{Q}^c| = 1$. この上で 1 となる関数の積分は 1 となってしかるべきである. このような単純な関数ですら積分できないのはやはり理論としては不完全である. そこで Lebesgue 積分が必要となってくるのである.

問 1.4 $|[0, 1] \cap \mathbf{Q}| = 0$ となることを Lebesgue 測度の性質から説明せよ.

Lebesgue 積分の発想は単純で関数 f の値域の方を細分して定義するのであるが, このとき問題となるが, 値域の細分の関数による引き戻しの集合 $f^{-1}([(k-1)/2^n, k/2^n))$ が可測となるかということである. そのためにまず**可測関数**を定義する.

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ が ${}^\forall a\in\mathbf{R}$, $\{f\le a\}=\{x\in\mathbf{R}; f(x)\le a\}\in\mathcal{L}$ をみたすとき, **Lebesgue 可測** であるという.

この可測関数を用いて, Lebesgue 積分が定義される. 即ち, $f\ge 0$ のとき,

$$\int f dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)dx := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}\left|\left\{\frac{k-1}{2^n}\le f<\frac{k}{2^n}\right\}\right| + n\left|\{f\ge n\}\right|\right)$$

と定義する. さらに一般のときは, $f^+=f\vee 0=\max\{f,0\}$, $f^-=(-f)\vee 0=\max\{-f,0\}$ とおくと $f^\pm\ge 0$ かつ $f=f^+-f^-$, $|f|=f^++f^-$ で, $\int f^+dx, \int f^-dx$ の少なくとも一方が有限のとき, **Lebesgue 積分可能**であるといい,

$$\int f dx = \int f^+dx - \int f^-dx$$

として定義する. また $f\in L^1=L^1(\mathbf{R})$ を $\int |f|dx<\infty$ で定義し, このとき f は**可積分**であるという.

定理 1.1 Riemann 積分可能なら Lebesgue 積分可能である.

この Lebesgue 積分の有用な定理として, まず Lebesgue の収束定理が挙げられる.

定理 1.2 (Lebesgue の収束定理)
可測関数 f_n, f に対し, $f_n\to f$ a.e., ${}^\exists h\in L^1; |f_n|\le h$ a.e. なら $\int f_n dx\to\int f dx$.

$\mathbf{R}^d$ 上の多変数でも同様に Lebesgue 測度, Lebesgue 積分が定義され, 積分順序の交換定理として次の Fubini の定理がある.

定理 1.3 (Fubini の定理) $\mathbf{R}^2$ 上の可測関数 $f(x,y)$ に対し,

(1) $f\ge 0$ a.e. ならいつでも $\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy=\int_{\mathbf{R}}dy\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dx=\int_{\mathbf{R}}dx\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$.

(2) f が一般でも $\int_{\mathbf{R}^2}|f(x,y)|dxdy, \int_{\mathbf{R}}dy\int_{\mathbf{R}}|f(x,y)|dx, \int_{\mathbf{R}}dx\int_{\mathbf{R}}|f(x,y)|dy$ の一つでも有限なら, 他も全て同じ値で, $\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy=\int_{\mathbf{R}}dy\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dx=\int_{\mathbf{R}}dx\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$.

これらの定理はいずれも非常に条件が簡単で, チェックしやすい. Riemann 積分のときには得られなかった結果で, これだけでも十分, Lebesgue 積分論の重要性を表していると言えるだろう.

この Lebesgue 積分は $(\mathbf{R},\mathcal{L},dx)$ を一般化して $(X,\mathcal{F},\mu)$ =(集合, σ 加法族, 測度) という抽象化された設定で同様に定義される.

$$\int f d\mu = \int_X f(x)\mu(dx).$$

2 可測集合と測度 (Measurable sets and Measures)

ここでは, 前節で述べた, 可測集合や測度の必要最小限の性質だけを抜き出し, 出来るだけ抽象的に話を進めよう. 以下では, X を集合として, その全部分集合族を 2^X で表す.

2.1 σ-加法族

定義 2.1 X の部分集合族 $\mathcal{F}$, i.e., $\mathcal{F} \subset 2^X$ が

$$(1)\ \emptyset \in \mathcal{F} \quad (2)\ A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F} \quad (3)\ A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

をみたすとき **σ-加法族** (**σ-additive class**) または **σ-集合体** (**σ-field**) という. また (3) のかわりに (3′) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ をみたすとき**加法族**または**集合体**という.

明らかに σ-加法族は加法族である ($\to$ 説明せよ).

$\{\emptyset, X\}$, $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ (A は X の任意の部分集合), 2^X (全部分集合族) などはすべて σ-field である ($\to$ 確かめよ).

問 2.1 $\mathcal{F}$ を 加法族とし, $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ とする. 次も $\mathcal{F}$ に属することを示せ.

$$X,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)(\text{対称差}),\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $A \setminus B = A \cap B^c$, $A \triangle B$ は定義から明らか. $\bigcup_{k=1}^n A_k$ は帰納法から. $\bigcap_{k=1}^n A_k = (\bigcup_{k=1}^n A_k^c)^c$.

問 2.2 次の集合族 $\mathcal{A}$ は集合体であるが σ-集合体ではないことを示せ.

(1) X が無限集合のとき $\{A \subset X : A$ か A^c が有限集合 ($\emptyset$ も含む)$\}$

(2) $X = \mathbf{R}, -\infty \le a \le b \le \infty$ に対し, $(a, b]$ の形の区間の有限和で表される集合 $\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k]$ 全体, 但し $b = \infty$ なら (a, ∞), $a = b$ なら $\emptyset$ とみなす.

[方針]

(1) は $A, B, A^c, B^c, A \cup B, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ について, 有限かどうかで分けて, 表をつくればすぐ分かる. σ-加法族でないことについては, $X = \mathbf{N}$ のとき, $A_n \in \mathcal{A}$ だが, $\bigcup A_n \notin \mathcal{A}$ なる例を作れば良い.

(2) は補集合が問題で, 2 つの区間の和のときに場合分けで調べれば良いが, 一般には $A = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k]$ に対し, $A^c = \bigcap_{k=1}^n (a_k, b_k]^c$ が元と同様な形で表されることを示せば良い. $1 \le m \le n$ に対し, $J_m = \{(j_1, \dots, j_m); 1 \le j_1 < \dots < j_m \le n\}$ として

$$A^c = \left(\bigcap_{j=1}^{n} (b_j, \infty) \right) \cup \bigcup_{m=1}^{n} \bigcup_{(j_1,\dots,j_m) \in J_m} \left(\bigcap_{k=1}^{m} (-\infty, a_{j_k}] \cap \bigcap_{j \ne j_k} (b_j, \infty) \right),$$

右辺第 1 項は $(\max b_j, \infty)$ で, さらに

$$\bigcup_{m=1}^{n} \bigcup_{(j_1,\dots,j_m) \in J_m} \left(\bigcap_{k=1}^{m} (-\infty, a_{j_k}] \cap \bigcap_{j \ne j_k} (b_j, \infty) \right) = \bigcup_{m=1}^{n} \bigcup_{(j_1,\dots,j_m) \in J_m} \left(\max_{j \ne j_k} b_j, \min_{k=1,\dots,m} a_{j_k} \right].$$

σ-加法族でないことについては, $(0, 1) = \bigcup_{n \ge 1} (0, 1 - 1/n]$ より分かる.

問 2.3 $\mathcal{F}$ を 集合体とする. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ に対し次を満たす $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ を作れ.

$$\{B_n\} \text{ は互いに素 (disjoint) で, 各 } n \geq 1 \text{ に対し, } \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

定理 2.1 集合 X のかってな部分集合族 $\mathcal{A}$ に対し, それを含む最小の σ-field $\mathcal{F}_0$ が存在する.

定義 2.2 上の $\mathcal{F}_0$ を $\sigma(\mathcal{A})$ で表し, $\mathcal{A}$ で生成される σ-field と呼ぶ. また $\mathcal{F}$ が σ-field のとき, $(X, \mathcal{F})$ を**可測空間 (measurable space)**, $\mathcal{F}$ の元を**可測集合 (measurable set)** という.

[定理 2.1 の証明]

実際, $\mathbf{F} := \{\mathcal{F} : \mathcal{F}$ は $\mathcal{A}$ を含む σ-field$\}$ に対し, $\mathcal{F}_0 = \bigcap \mathbf{F}$ で与えられ, 次をみたす.

(1) $\mathbf{F} \neq \emptyset$, i.e., $\mathcal{A}$ を含む σ-field が一つはある. (2) $\mathcal{F}_0$ は σ-field. (3) $\mathcal{F}_0$ は最小で一意

(1) $2^X \in \mathbf{F}$ より明らか.

(2) ${}^\forall\mathcal{F} \in \mathbf{F}, \emptyset \in \mathcal{F}$ より, $\emptyset \in \mathcal{F}_0$. $A \in \mathcal{F}_0$ なら ${}^\forall\mathcal{F} \in \mathbf{F}, A \in \mathcal{F}$ から $A^c \in \mathcal{F}$. よって $A^c \in \mathcal{F}_0$. $A_n \in \mathcal{F}_0$ なら $\bigcup A_n \in \mathcal{F}$ も同様.

(3) $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_0$ と (2) より, $\mathcal{F}_0 \in \mathbf{F}$. しかも ${}^\forall\mathcal{F} \in \mathbf{F}, \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. 即ち, $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{A}$ を含む σ-field の中で最小. もし $\mathcal{F}_1$ も $\mathcal{A}$ を含む最小の σ-field とすると, $\mathcal{F}_1 \in \mathbf{F}$ より, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$. さらにもしこれらが等しくなければ $\mathcal{F}_1$ の最小性に反するから $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1$. よって一意. ■

2.2 Borel 集合体

定義 2.3 X が位相空間のとき, 開集合の全体 $\mathcal{O}$ から生成される σ-field $\sigma(\mathcal{O})$ を **Borel field** と呼び, $\mathcal{B}(X)$ で表す. 特に $X = \mathbf{R}^n$ のとき $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ を n **次元 Borel field** という. また $n = 1$ のとき, 簡単に $\mathcal{B} = \mathcal{B}^1$ と表すこともある.

問 2.4 $X = \mathbf{R}$ とし, $\mathcal{C}$ をその閉集合の全体とする. このとき $\mathcal{B}^1 = \sigma(\mathcal{C})$ を示せ.

$\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$, $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{O})$ より明らか.

問 2.5 $\mathcal{A}_1 := \{(a, b); -\infty \leq a < b \leq \infty\}$, $\mathcal{A}_2 := \{[a, b) : -\infty < a < b \leq \infty\}$, $\mathcal{A}_3 := \{[a, b] : -\infty < a < b < \infty\}$, $\mathcal{A}_4 := \{(a, b] : -\infty \leq a < b < \infty\}$, $\mathcal{A}_5 := \{(-\infty, r] : r \in \mathbf{Q}\}$ に対し, $\sigma(\mathcal{A}_i) = \mathcal{B}^1$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ となることを示せ.

(ヒント): 1 次元開集合は素な開区間の可算和で表される ($\rightarrow$ 何故か？). これから $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{A}_1)$.

[解] まず $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{O}$ は明らか. よって $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}^1$. (ヒント) と合わせて $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B}^1$. また $\sigma(\mathcal{A}_1) \supset \mathcal{A}_2$, $\sigma(\mathcal{A}_2) \supset \mathcal{A}_3$, $\sigma(\mathcal{A}_3) \supset \mathcal{A}_4$, $\sigma(\mathcal{A}_4) \supset \mathcal{A}_1$ は容易に示せるから $i = 1, 2, 3, 4$ までは OK. $\mathcal{A}_5$ については, 色々な示し方があるが, 例えば $-\infty \leq a < b \leq \infty$ に対し, 有理数列 $r_n < s_n$ を $r_n \downdownarrows a$, $s_n \upuparrows b$ ととれば,

$$(a, b) = \bigcup_{n \geq 1} (r_n, s_n] = \bigcup_{n \geq 1} ((-\infty, s_n] \setminus (-\infty, r_n])$$

から, $\sigma(\mathcal{A}_5) \supset \mathcal{A}_1$ が示せるので, $\mathcal{A}_5 \subset \mathcal{A}_4 \subset \mathcal{B}^1$ と合わせていえる. ■

2.3 測度空間

$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ として, $+\infty = \infty$ と表し, 便宜上, 次のように定める: $a \in \mathbf{R}$ (有限値) に対して

$$a \pm \infty = \pm\infty, \quad a \times \infty = \infty \ (a > 0), = -\infty \ (a < 0), \quad 0 \times \infty = \infty \times 0 = 0, \quad a/\infty = 0.$$

∞ を $-\infty$ に変えても同様である. また $\infty - \infty$ や ∞/∞ などは定義しない (できない).

注意 ここで注意して欲しいのは $\infty/\infty = \infty \times 1/\infty = \infty \times 0 = 0$ などという計算をしてはいけない！ということである. 上の無限大はあくまで, 有限な値からの極限として考えるべきものである.

定義 2.4 $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする. 集合関数 $\mu = \mu(dx) : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ が**測度 (measure)** であるとは

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が互いに素 (disjoint, i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$ if $i \neq j$) ならば

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-加法性 } (\sigma\text{-additivity}))$$

をみたすときをいう. このとき $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を**測度空間 (measure space)** と呼ぶ.

以下 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を measure space とする.

問 2.6 $A, B \in \mathcal{F}$ とする. 次を示せ.

(1) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ が disjoint $\Longrightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ (**有限加法性**).

(2) $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (**単調性**).

(3) $A \subset B, \mu(A) < \infty \Longrightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(4) $\mu(A \triangle B) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B)$.

(5) $\mu(A \cap B) < \infty \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

(1) σ-加法性で $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$. (2) 有限加法性と非負性. (3) $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$. (4), (5) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, $\lim A_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ (if $A_n \uparrow$), $= \bigcap_{n \geq 1} A_n$ (if $A_n \downarrow$) と定義する. また一般のときは

$$\overline{\lim} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n := \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_n, \quad \underline{\lim} A_n = \liminf_{n \to \infty} A_n := \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} A_n$$

とおき, この 2 つが等しいとき, それを $\lim A_n$ で表す.

参考 数列 $\{a_n\}$ に対しては

$$\underline{\lim} a_n := \lim_{N \to \infty} \inf_{n \geq N} a_n = \sup_{N \geq 1} \inf_{n \geq N} a_n, \quad \overline{\lim} a_n := \lim_{N \to \infty} \sup_{n \geq N} a_n = \inf_{N \geq 1} \sup_{n \geq N} a_n.$$

問 2.7 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ とする. 次を示せ.

(1) $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$ (σ-**劣加法性**)

(2) $A_n \uparrow \quad \Longrightarrow \mu(\bigcup_n A_n) = \lim \mu(A_n)$

(上のを **上方連続性**, 下のは **下方連続性** で, まとめて**単調連続性** という)

(3) $A_n \downarrow$, $\mu(A_1) < \infty$ (実は ${}^{\exists}N \geq 1; \mu(A_N) < \infty$ で良い) $\Longrightarrow \mu(\bigcap_n A_n) = \lim \mu(A_n)$.

(4) 上で条件 $[{}^\exists N \geq 1; \mu(A_N) < \infty]$ を落とせない例を作れ.

(5) $\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n)$

(6) $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) < \infty$ (実は ${}^\exists N \geq 1; \mu(\bigcup_{n=N}^\infty A_n) < \infty$ で良い) $\Longrightarrow \mu(\overline{\lim}\, A_n) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_n)$

(7) 上で条件 $[{}^\exists N \geq 1; \mu(\bigcup_{n=N}^\infty A_n) < \infty]$ を落とせない例を作れ.

(8) $\sum_n \mu(A_n) < \infty \Longrightarrow \mu(\overline{\lim}\, A_n) = 0$ (**Borel-Cantelli の補題**).

(ヒント)　上の例を作る問題 (4), (7) では $X = \mathbf{N}$ として後で述べる計数測度を考えるか, $X = \mathbf{R}$ として Lebesgue 測度を考えよ.

(1) 問 2.3 の B_n と加法性. (2) $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $(A_0 = \emptyset)$ と加法性. (3) $B_n = A_1 \setminus A_n$.

(5) 数列 $\{a_n\}$ に対し, $\underline{\lim}\, a_n := \lim_{N\to\infty} \inf_{n\geq N} a_n$ に注意して, まず, ${}^\forall N \geq 1$, ${}^\forall n \geq N$, $\mu(A_n) \leq \mu(\bigcap_{n\geq N} A_n)$ より, $\inf_{n\geq N} \mu(A_n) \leq \mu(\bigcap_{n\geq N} A_n)$. さらに $B_N = \bigcap_{n\geq N} A_n \downarrow (N \uparrow \infty)$ と単調連続性から $N \to \infty$ として

$$\underline{\lim}\, \mu(A_n) = \lim_{N\to\infty} \inf_{n\geq N} \mu(A_n) \leq \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcap_{n\geq N} A_n) = \mu(\bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} A_n) = \mu(\underline{\lim}\, A_n).$$

(6) $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ として $B_n = A \setminus A_n$ を考える.

(8) [Borel-Cantelli の補題]　まず $\mu(\bigcup A_n) \leq \sum \mu(A_n) < \infty$ と $C_N = \cup_{n\geq N} A_n \downarrow (N \uparrow \infty)$, さらに下方連続性, σ-劣加法性より,

$$0 \leq \mu(\overline{\lim}\, A_n) = \mu(\bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} A_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{n\geq N} A_n) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \mu(A_n) = 0.$$

定義 2.5　$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする. $\mu(X) < \infty$ のとき, **有限測度 (finite measure)** といい, 特に $\mu(X) = 1$ のとき**確率測度 (probability measure)** という. また $\mu(X) = \infty$ であっても ${}^\exists A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$; $\mu(A_n) < \infty ({}^\forall n)$ かつ $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = X$ のとき μ は **σ-有限測度 (σ-finite measure)** であるという.

[**注**]　慣習として μ が確率 (測度) のとき, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と表し, **確率空間**という. また $\omega \in \Omega$, $P = P(d\omega)$ と表し, $\mathcal{F}$ の元を**事象 (event)** と呼ぶ.

2.4　測度空間の例

測度空間の例 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を挙げておく.

例 1　**計数測度 (counting measure)**

X: 任意の集合, $\mathcal{F} = 2^X$ とし, $\mu(A) = \sharp A$ (A の濃度) if A is a finite set, $\mu(A) = \infty$ otherwise.

例 2　**δ-測度 (Dirac measure)**

X: 任意の集合, $\mathcal{F} = 2^X$ とし, $x \in X$ を任意に固定する. $\mu(A) = 1$ if $x \in A$, $\mu(A) = 0$ if $x \notin X$ このとき $\mu = \delta_x$ と表す.

例 3　**離散測度 (discrete measure)**

$X = \{x_n\}$: 可算または有限集合, $\mathcal{F} = 2^X$ とする. $\mu = \sum_n p_n \delta_{x_n}$ $(p_n > 0)$

例 4　$\mathcal{B}^n$ 上の Lebesgue 測度 (Lebesgue measure on $\mathcal{B}^n$)

$X = \mathbf{R}^n, \mathcal{F} = \mathcal{B}^n$ とする．このとき $A = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k]$ $(-\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty)$ に対し, $\mu(A) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ を満たす測度 μ が存在する．これを **$\mathcal{B}^n$ 上の Lebesgue 測度** といい, 記号で $|\cdot|$ や dx また $m = m(dx)$ などと表す.

後で, これを拡張した Lebesgue 測度を定義するが, 本質的な差は殆どなく, 実際の解析においても, 上の $\mathcal{B}^n$ 上の Lebesgue 測度のままで扱うことが多い.

これらの存在定理については §9 で, 外測度の定義や測度の拡張定理を用いて証明する.

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の例を挙げておく.

離散型確率空間　$p_k = P(\{k\})$ とおく $(\to P = \sum_k p_k \delta_k)$

例 5　二項分布　$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots, n\}, 0 < p < 1$

$$p_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

例 6　Poisson 分布　$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}, \lambda > 0$

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \cdots.$$

例 7　幾何分布　$\Omega = \mathbf{N}, 0 < p < 1$

$$p_k = p(1-p)^{k-1},\ k = 1, 2, \cdots.$$

連続型確率空間

例 8　一様分布　$\Omega = (a, b), \mathcal{F} = \mathcal{B}^1(a, b)$ $(-\infty < a < b < \infty)$

$$P(A) = |A|/(b-a).$$

例 9　Cauchy 分布　$\Omega = \mathbf{R}^1, \mathcal{F} = \mathcal{B}^1$, $m \in \mathbf{R}, a > 0$

$$P(A) = \int_A \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + (x-m)^2} dx.$$

例 10　正規分布 $N(m, v)$　$\Omega = \mathbf{R}^1, \mathcal{F} = \mathcal{B}^1$

$$P(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left[-\frac{-(x-m)^2}{2v}\right] dx.$$

但し $m \in \mathbf{R}$: 平均 (**mean**), $v > 0$: 分散 (**variance**).

例 11　d 次元正規分布 $N(\boldsymbol{m}, V)$　$\Omega = \mathbf{R}^d, \mathcal{F} = \mathcal{B}^d$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^d$ は縦ベクトルとして, ${}^t\boldsymbol{x}$ で転置 (横ベクトル) を表す.

$$P(A) = \int_A \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} {}^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}) Q (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\right] d\boldsymbol{x}.$$

但し $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{R}^d$: **平均ベクトル**, V: 正値対称 $d \times d$ 行列; **共分散行列 (covariance)**, $Q = V^{-1}$

問 2.8　上の確率の例すべてに対し, $P(\Omega) = 1$ を確かめよ.

3 可測関数 (Measurable Functions)

定義 3.1 $(X,\mathcal{F})$ を可測空間とし, $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ とおく. $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$: **$\mathcal{F}$-可測 (関数)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\{f \le a\} := \{x \in X : f(x) \le a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$.

またこのとき簡単に $f \in \mathcal{F}$ と表すこともある.

特に $(X,\mathcal{F}) = (\mathbf{R},\mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ は 1 次元 Borel field) のとき $f : \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ は **Borel-可測 (関数)**, または **Borel 関数**であるという.

問 3.1 $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ に対して次は同値であることを示せ:

(1) f は $\mathcal{F}$-可測 (2) $\{f > a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$ (3) $\{f \ge a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$

(4) $\{f < a\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall a \in \mathbf{R})$

問 3.2 上で条件 $[{}^\forall a \in \mathbf{R}]$ を $[{}^\forall a \in \mathbf{Q}]$ と置き換えられることを示せ.

問 3.3 $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ は $\mathcal{F}$-可測

$\iff$ $f^{-1}(B) := \{f \in B\} \in \mathcal{F}$ $({}^\forall B \in \mathcal{B})$ かつ $\{f = +\infty\}, \{f = -\infty\} \in \mathcal{F}$ を示せ.

特に f が実数値のとき, $\mathcal{F}$-可測 $\iff$ $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$.

$\{f \le a\} = f^{-1}([-\infty, a]) = \{f = -\infty\} \cup f^{-1}((-\infty, a])$ から $(\Leftarrow)$ は明らか. 逆はまず $\{f = \pm\infty\} \in \mathcal{F}$ を示し. $\mathcal{B} = \sigma(\{(-\infty, a]; a \in \mathbf{R}\})$ (問 2.5) と $\mathcal{D} = \{A \subset \mathbf{R}; f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$: σ-field, $\supset \{(-\infty, a]; a \in \mathbf{R}\}$.

問 3.4 f, g, f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が $\mathcal{F}$-可測なら, 次の関数も (定義されれば) そうであることを示せ: $\alpha \in \mathbf{R}$ とする.

(1) αf (2) $f + g$ (3) fg (4) $1/f$ (5) $|f|$ (6) $\sup f_n$ (7) $\inf f_n$

(8) $\overline{\lim} f_n$ (9) $\underline{\lim} f_n$ (10) $\lim_{n\to\infty} f_n$

(1) $\alpha > 0, = 0, < 0$ で場合分け. (2) $\{f < a - g\} = \bigcup_{r\in\mathbf{Q}}\{f < r < a - g\}$. (3) $f^2 \in \mathcal{F}$ を示し, $fg = \{(f+g)^2 + (f-g)^2\}/2$. (4) $\{1/f \le a\} = \{f > 0, af \ge 1\} \cup \{f < 0, af \le 1\}$ と (1) より. (5) $\{|f| \le a\}$, $a \ge 0, < 0$. (6) $\{\sup f_n \le a\} = \bigcap\{f_n \le a\}$ (7) $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ (8) $\overline{\lim} f_n = \inf_{N\ge1} \sup_{n\ge N} f_n$

問 3.5 f, g が $\mathcal{F}$-可測なら, $\sqrt{f}, f \vee g, f \wedge g$ も (定義されれば) そうであることを示せ. 但し $f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

$f \vee g, f \wedge g$ を $f \pm g$ と絶対値を用いて表すと？

問 3.6 連続関数は Borel 関数であることを示せ.

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が連続 $\iff$ $f^{-1}(\mathcal{O}^1) \subset \mathcal{O}^1$. $\mathcal{D} = \{A \subset \mathbf{R}; f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$: σ-field, $\supset \mathcal{O}^1$.

問 3.7 $\mathcal{F}$ を $\mathbf{R}$ 上の σ-field とする. 任意の連続関数が $\mathcal{F}$-可測となるならば, $\mathcal{F} \supset \mathcal{B}$ となることを示せ. $(f(x) = x)$

定義 3.2 (1) $A \subset X$ に対し $1_A(x) = 1$ $(x \in A)$, 0 $(x \notin A)$ と定義し, 1_A を A の**定義関数** (**defining function**) という.

(2) $f : X \to \mathbf{R}$ に対し, $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$ と X の有限可測分割 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ が存在し,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k}(x)$$

と表せるとき f は**単関数 (simple function)** と呼ばれる.

問 3.8 (単関数での近似定理) 任意の非負可測関数 $f : X \to [0, +\infty]$ に対して非負単関数の増加列 $\{f_n\}$ が存在して $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ を満たすことを示せ.

$^\forall f : X \to [0, +\infty]$: $\mathcal{F}$-可測, $^\exists\{f_n\}$: 単関数列; $0 \le f_n \uparrow f$.

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} 1_{\{(k-1)/2^n \le f < k/2^n\}}(x) + 2^n 1_{\{f \ge 2^n\}}(x).$$

問 3.9 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上で $f(x) = x^2$ は可測関数であることを示し, 上の証明で与えられる f_1, f_2, f_3 をグラフに描いてみよ.

定義 3.3 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする.

(1) $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{F}$ を **μ-零可測集合** という. また μ-零可測集合 N が存在して $A \subset N$ なる集合を **μ-零集合**という.

(2) X 上の命題関数 $P(x)$ に対し $\{x \in X : P(x)$ が偽 $\}$ が μ-零集合であるとき, $P(x)$ は**殆ど到るところで成り立つ**といい $P, \mu-$a.e. と表す.

例えば

・$f = g, \mu$-a.e. $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(f \ne g) = 0$.

・$f_n \to f$, μ-a.e. $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(f \not\to f) = 0$.

・$\lim f_n$ exists, μ-a.e. $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(\overline{\lim}\, f_n \ne \underline{\lim}\, f_n) = 0$.

また $M = M(X) = M(X, \mu) = M(X, \mathcal{F}, \mu) := \{f : X \to \overline{\mathbf{R}}; \mathcal{F}$-可測 $\}$ とおく.

問 3.10 $M(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上に $f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} f = g, \mu$-a.e. により同値関係 $\sim$ が定義され,

(1) $f \sim g \Longrightarrow af \sim ag$ $\quad(^\forall a \in \mathbf{R})$, (2) $f_1 \sim g_1$ かつ $f_2 \sim g_2 \Longrightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

を満たす. また, 商集合 $\{f \in M(X, \mathcal{F}, \mu) : |f| < +\infty, \mu\text{-a.e.}\}/\sim$ は線形空間となる.

4 Lebesgue 積分 (Lebesgue Integrals)

4.1 Lebesgue 積分の定義

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上で可測関数 f の積分 $\displaystyle\int f d\mu = \int_X f d\mu = \int_X f(x)\mu(dx)$ を定義していく.

定義 4.1 非負単関数 $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ に対して, その積分を次で定義する:

$$\int f d\mu = \int_X f d\mu = \int_X f(x)\mu(dx) := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i), \text{ 即ち, } \int \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

問 4.1 上の定義が well-defined, 即ち f の表現に依存しないことを示せ.

別の表現 $f = \displaystyle\sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$ を持つとしても $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j)$ が成り立つことを示す.

(ヒント) 共通の分割 $\{C_{ij} = A_i \cap B_j\}$ を考える.

問 4.2 非負単関数 f, g に対し次が成り立つことを示せ.

(1) $\displaystyle\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ (2) $\alpha \geq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$

(3) $f \geq g \Longrightarrow \displaystyle\int f d\mu \geq \int g d\mu$ **(ヒント)** (1), (3) は共通の分割を考える.

定義 4.2 非負可測関数 f に対して, $\{f_n\}$ を非負単関数の増加列で, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ なるものとする (問 3.8). このとき次のように定義する.

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

補題 4.1 上の定義は well-defined, 即ち $\{f_n\}$ の選び方に依存しない.

証明は非負単関数 $g = \displaystyle\sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$; $g \leq f \Rightarrow \displaystyle\int g d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ を示せば十分 ($\to$ 何故か？).

(1) $\displaystyle\int g d\mu < \infty$ (なら $\mu(g>0) < \infty$) と (2) $\displaystyle\int g d\mu = \infty$ (なら ${}^\exists j_0; b_{j_0} > 0, \mu(B_{j_0}) = \infty$) とに分けて示す. $b_0 = \min\{b_j > 0\}$ とし ($b_0 = 0$ なら $g = 0$ で明らか, $b_0 > 0$ として良い), $0 < {}^\forall\varepsilon < b_0$ をとる. また $\{f_n > g - \varepsilon\} \uparrow X$ と $\{g > 0\} = \{g \geq b_0\}$ に注意し, $A_n = \{f_n > g - \varepsilon\} \cap \{g > 0\}$ に制限して示す.

$$\int f_n d\mu \geq \int f_n 1_{A_n} d\mu \geq \int (g-\varepsilon) 1_{A_n} d\mu = \sum_{j; b_j > 0} (b_j - \varepsilon)\mu(B_j \cap A_n) \uparrow \sum_{j; b_j > 0} (b_j - \varepsilon)\mu(B_j \cap \{g > 0\})$$

最後の式は (1) なら $= \int g d\mu - \varepsilon\mu(g > 0)$, (2) なら $\geq (b_{j_0} - \varepsilon)\mu(B_{j_0}) = \infty$.

問 4.3 $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ に対し, $f^+ := f \vee 0$, $f^- := -(f \wedge 0)$ とおく. このとき $f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$ を示せ.

定義 4.3 $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ を $\mathcal{F}$-可測関数とする. $\displaystyle\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu$ のいずれか一方が有限のとき, f の**積分は定義される**といい,

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

とする. また $\displaystyle\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu$ のいずれもが有限のとき, f は**積分可能**または**可積分 (integrable)** であるという.

問 4.4 前のことを踏まえて, $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上の可測関数 f に対し, 次を示せ.

$$\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

(**(ヒント)** 非負可測関数に対し, 和の積分が別れることを単関数からの近似で示せば良い.)

このことより, 可測関数 f に対し, f : integrable $\Longleftrightarrow \int |f| d\mu < \infty$ がわかる.

定義 4.4 f: $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上の可測関数, $A \in \mathcal{F}$ とする. 可測関数 $1_A f$ の積分が定義されるとき, f の A 上の積分を

$$\int_A f d\mu := \int 1_A f d\mu$$

で定める. また次の関数空間の元を L^1**-関数** (L^1**-function**) と呼ぶ.

$$L^1 = L^1(X) = L^1(X,\mu) = L^1(X,\mathcal{F},\mu) := \left\{ f \in M(X,\mathcal{F},\mu) : f \text{ は可積分}, \text{i.e.}, \int |f| d\mu < \infty \right\}$$

4.2 Lebesgue 積分の性質

積分の簡単な性質を述べる. 以下, $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上の可測関数 f, g は積分が定義されるものとする.

問 4.5 $A \in \mathcal{F}, \mu(A) = 0 \Longrightarrow \int_A f d\mu = 0$

問 4.6 $\int a f d\mu = a \int f d\mu \quad ({}^\forall a \in \mathbf{R})$

問 4.7 $f, g \in L^1(X,\mathcal{F},\mu) \Longrightarrow \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

さらに条件を弱めて $\int f d\mu, \int g d\mu$ 共に $> -\infty$ or $< \infty$ なら $\int (f+g) d\mu > -\infty$ or $< \infty$ で, 成り立つ.

問 4.8 $A, B \in \mathcal{F}$ かつ $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

問 4.9 $f \leq g, \mu\text{-a.e.} \Longrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

問 4.10 $f = g, \mu\text{-a.e.} \Longrightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$

問 4.11 $f \geq 0, \mu$-a.e. かつ $\int f d\mu = 0 \Longrightarrow f = 0, \mu\text{-a.e.}$

問 4.12 $\int_A f d\mu = 0 \quad ({}^\forall A \in \mathcal{F}) \Longrightarrow f = 0, \mu\text{-a.e.}$

問 4.13 $f \in L^1(X,\mathcal{F},\mu) \Longrightarrow |f| < \infty, \mu\text{-a.e.}$

問 4.14 $g \in L^1(X,\mathcal{F},\mu)$ かつ $|f| \leq g, \mu\text{-a.e.} \Longrightarrow f \in L^1(X,\mathcal{F},\mu)$

問 4.15 $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$

問 4.16 (複素数値積分) $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f : X \to \mathbf{C}$ (複素数値, $i = \sqrt{-1}$) で $\mathrm{Re}f$, $\mathrm{Im}f$ ともに可積分のとき f も可積分であるといい, $\displaystyle\int f d\mu = \int \mathrm{Re}f d\mu + i \int \mathrm{Im}f d\mu$ と定義する. このとき上に挙げた性質はすべてみたされることを確かめよ. 特に直前 (問 4.15) の不等式を示せ.

問 4.5 から問 4.10 はまず非負単関数に対して示し, 非負可測関数, 可測関数の場合に言及する. 問 4.6 は $a \geq 0$, $a = -1$ の順に示し, $a < 0$ のときは前のことから示せる. 問 4.7 で可測関数の場合に次を用いる:

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

問 4.8 は 問 4.7 より明らか.

問 4.9. $f \leq g$ のときは $\int f d\mu > -\infty$ かつ $\int g d\mu < \infty$ のときを示せば十分で, しかも 問 4.7 より $f = 0$ として考えて良いことを示せば殆ど明らか. $f \leq g, \mu$-a.e. のときは $A := \{f \leq g\}$ とおいて問 4.5, 問 4.8 を用いる.

問 4.10 は 問 4.9 より明らか.

問 4.11. $A_n := \{f \geq 1/n\}$ とおいて示す.

問 4.12. $A := \{f \geq 0\}$ より $f^+ = 0, \mu$-a.e. をいう. f^- の方も同様.

問 4.13. 対偶を示す.

問 4.16. 複素数値のとき 問 4.15 をみたすことについて.

複素数 $z = |z|e^{i \arg z}$ について $|z| = e^{-i \arg z} z$ を用いる. 実際, ${}^\forall \theta \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \int f d\mu\right) = \int \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f\right) d\mu \leq \int |f| d\mu$$

において, $\theta = \arg \int f d\mu$ を代入すれば良い.

5 収束定理 (Convergence Theorems)

ここでは $f, f_1, f_2, \cdots$ をある測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の可測関数とする.

$\mu(\lim f_n \neq f) = 0$ のとき f_n は f に**概収束**するといい, $f_n \to f$, μ-a.e. と表す. a.e. は almost everywhere の略. (ちなみに確率論では $\mu = P$ として P-a.s. と表し, a.s. は almost surely の略.)

問 5.1 一般に $f_n \to f$, μ-a.e. であっても, $\displaystyle\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ が成り立つとは限らないが, その例を作れ.

(ヒント) $X = (0,1), \mathcal{F} = \mathcal{B}(0,1), \mu(dx) = dx$ として, $f_n \downarrow 0$ (各点収束) かつ $\displaystyle\int f_n dx = 1$ なるものを作れば良い.

定理 5.1 (単調収束定理 (Monotone Convergence Theorem))
$[0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ かつ $f_n \to f]$, μ-a.e., i.e., $0 \leq f_n \uparrow f$, μ-a.e. ならば

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

(証明) $X_0 = \{0 \leq f_n \uparrow f\}$ に制限して考えれば $(f, f_n$ を $f1_{X_0}, f_n 1_{X_0}$ に代える) μ-a.e. がないときに示せば十分で, f_n 単関数なら定義より明らか. "$\leq$" を示せばよい. 各 f_n に対し, 非負単調増加単関数列 $\{f_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}; \lim_{k\to\infty} f_{n,k} = f_n$ が存在する. $g_k := \max\{f_{n,k} : n \leq k\}$, $g := \lim_{k\to\infty} g_k$ とおくと, $n \leq k \Rightarrow f_{n,k} \leq g_k \leq f_k \leq f$ より $k \to \infty, n \to \infty$ とすれば, $g = f$ を得て, g_k が単関数であることから求める不等式を得る.

補題 5.1 (Fatou の補題 (Fatou's Lemma)) $f_n \geq 0, \mu$-a.e. $(^\forall n \geq 1)$ であれば

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

(証明) μ-a.e. がないときに示せば十分. $g_n := \inf\{f_k : k \geq n\}$ に対して MCT を用いる.

定理 5.2 (Lebesgue の収束定理 (Lebesgue's Convergence Theorem))
$f_n \to f$, μ-a.e. かつ $^\exists h \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$; $|f_n| \leq h$ $(^\forall n \geq 1)$, μ-a.e. ならば, $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ で

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

正確には **Lebesgue の優収束定理 (Dominated Convergence Theorem)** という. 特に $\mu(X) < \infty$ で h が定数としてとれるときには **Lebesgue の有界収束定理 (Bounded Convergence Theorem)** という.

(証明) μ-a.e. がないときに示せば十分で, まず $|f|$ に対し, Fatou's lemma から $f \in L^1$ がいえる. $-h \leq f_n \leq h, \mu$-a.e. に注意して $f_n + h$ と $h - f_n$ に対して Fatou's lemma を用いれば良い.

問 5.2 $\mu(dx)$: a finite measure on $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ とすると $i = \sqrt{-1}$ に対し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} e^{ix/n} \mu(dx) = \mu(\mathbf{R})$ となることを説明せよ.

問 5.3 $f \in L^1([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), dx)$ と $t \geq 0$ に対し, $L(t) := \displaystyle\int_{[0,\infty)} e^{-tx} f(x) dx$ とおくと, 連続関数となることを示せ.

(ヒント) $^\forall t \geq 0, ^\forall \{t_n\} \subset [0,\infty); t_n \to t$ に対し, $L(t_n) \to L(t)$ を示せば良い. (何故か？)

問 $L(t)$ 連続 at ${}^\forall t \geq 0 \iff {}^\forall t \geq 0, {}^\forall \{t_n\} \subset [0,\infty); t_n \to t$ に対し, $L(t_n) \to L(t)$ を示せ.

問 5.4 上の問で更に $xf(x) \in L^1([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), dx)$ なら $L(t)$ は $t > 0$ について C^1 関数となることを示せ.

$$\text{(ヒント)} \quad x \geq 0, 0 < |h| < t/2 \Longrightarrow \left| \frac{e^{-(t+h)x} - e^{-tx}}{h} \right| = \frac{x}{|h|} \left| \int_0^h e^{-(t+s)x} ds \right| \leq xe^{-tx/2} \leq x.$$

問 5.5 $\mu(dx)$: a finite measure on $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, $i = \sqrt{-1}$ とする. $z \in \mathbf{R}$ に対し, $F(z) = \displaystyle\int e^{izx} \mu(dx)$ とおくと, これも連続関数になり, さらに $n \geq 1$ に対し, $|x|^n \in L^1(\mathbf{R}, \mathcal{B}, \mu)$ なら C^n 関数となることを示せ. (「$|x|^n \in L^1$ から ${}^\forall k \leq n$, $|x|^k \in L^1$」を用いる. これは後に述べる Hölder の不等式から言える,)

定理 5.3 (積分の絶対連続性 (Absolute Continuity)) $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ に対し,

$$\mu(A) \to 0 \Longrightarrow \int_A f d\mu \to 0 \text{ i.e., } {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists \delta > 0; {}^\forall A \in \mathcal{F}; \mu(A) < \delta, \int_A f d\mu < \varepsilon,$$

(証明)

$$f_n := \begin{cases} f & (|f| \leq n) \\ n & (|f| > n) \end{cases}$$

とおくと MCT より

$$\int |f| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int |f_n| d\mu$$

を得るから, 次の不等式を用いればよい:

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu = \int_A (|f| - |f_n|) d\mu + \int_A |f_n| d\mu \leq \int_X (|f| - |f_n|) d\mu + n\mu(A).$$

6 完備測度空間 (Complete Measure Spaces)

6.1 測度の完備化

定義 6.1 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする.

(1) $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{F}$ を **μ-零可測集合** という. また μ-零可測集合 N に対して, その任意の部分集合 $A \subset N$ を **μ-零集合**という. その全体を $\mathcal{N}$ と表す.

(2) μ-零集合がすべて可測であるとき, μ は**完備測度**であるという.

問 6.1 "任意の測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ に対し, 完備測度空間 $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ が存在し, $\overline{\mu}$ は μ の拡張である" という定理を次の手順で示せ.

(1) $\overline{\mathcal{F}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}$ は $\mathcal{F}$ を含む σ-field

(2) $A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}$ に対し, $\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ とおくと, これは $(X, \overline{\mathcal{F}})$ 上の測度となる.

(3) $\overline{\mu}$ は完備測度である.

定義 6.2 上で得られた $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ を $(X, \mathcal{F}, \mu)$ の**完備化測度空間**という.

定義 6.3 (Lebesgue 測度空間) $m = m(dx) = dx$ を $\mathcal{B}^n$ 上の Lebesgue 測度とし, $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n, m)$ の完備化 $(\mathbf{R}^n, \overline{\mathcal{B}^n}, \overline{m})$ に対し, $\mathcal{L}^n := \overline{\mathcal{B}^n}$ を **Lebesgue 集合体**, その元を **Lebesgue 可測集合** という. さらに $\overline{m}$ を同じ m で表し, $(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$ を普通に **Lebesgue 測度空間**という.

[注] 後で違う定義の仕方を与えるが, それも同じものとなる.

6.2 Riemann 積分との関係

Riemann 積分と Lebesgue 積分の関係について述べておく.

定理 6.1 閉区間 $[a, b]$ 上の有界な関数 f が Riemann 可積分ならば, Lebesgue 測度に関して可積分でその値は一致する, 即ち

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)m(dx).$$

ここで, 左辺は Riemann 積分, 右辺は完備化された Lebesgue 測度 m による Lebesgue 積分とする.

(証明) f: 有界より, $M := \sup_{[a,b]} |f| < \infty$. 区間 $[a, b]$ を 2^n 等分し, 分割の各小区間で下限, 上限それぞれに値をとる単関数 g_n, h_n の極限を各々 g, h すると,

$$-M \leq \inf_{[a,b]} f \leq g_n \leq g \leq f \leq h \leq h_n \leq \sup_{[a,b]} f \leq M$$

で, Riemann 積分可能の仮定とその定義から, 上積分=下積分=Riemann 積分で, 次を得る.

$$\int_{[a,b]} g dx = \int_{[a,b]} h dx = \int_a^b f dx.$$

このことから $h = g, m$-a.e. 従って完備化された Lebesgue 測度空間で考えれば $f = g = h$, m-a.e., 即ち, f も可測, かつ, 可積分となり求める結果を得る. ■

注意 完備化する前の測度の元では, f が可測かどうかは一般に分らない. しかし, g, h は可測で, $g \leq f \leq h$ かつ, $[g = h,\ m\text{-a.e.}]$ なので, 零集合を除けば, f は g, h に等しいことになる.

6.3 非可測集合

$(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$ を Lebesgue 測度空間とする.

定義から $\mathcal{B}^n \subset \mathcal{L}^n \subset 2^{\mathbf{R}^n}$ は成り立つが, これらは果して異なるのであろうか？それに答えるのが次の結果で, 実際, 3 つとも異なる.

定理 6.2 選択公理を認めれば $A \subset \mathbf{R}^n$ に対し, $[2^A \subset \mathcal{L}^n\ iff\ A \in \mathcal{L}^n, m(A) = 0]$. さらにこれから $\mathcal{L}^n \subsetneq 2^{\mathbf{R}^n}$.

この証明のためには次の結果が必要である.

補題 6.1 $A \in \mathcal{L}^n$ なら $^\forall x \in \mathbf{R}^n$, $x + A \in \mathcal{L}^n$, $m(x + A) = m(A)$.

(証明) Lebesgue 測度の存在と一意性を用いて示す. まず, $^\forall x \in \mathbf{R}^n$ を 1 つ固定し, $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbf{R}^n; x + A \in \mathcal{B}^n\}$ が σ 集合体で, $(a, b]$ の形の区間全体を含むことから, $x + \mathcal{B}^n = \mathcal{B}^n$. 更に $m_x(A) = m(x + A)$ on $\mathcal{B}^n$ と定義すれば, 明らかに測度で, 区間 $(a, b]$ については一致するので, Lebesgue 測度の一意性から, $m_x = m$ on $\mathcal{B}^n$ も明らか. さらにこれから, 零集合全体 $\mathcal{N}$ に対しても, $x + \mathcal{N} \subset \mathcal{L}^n$, かつ, $m_x = m$ on $\mathcal{N}$. 従って, $m_x = m$ on $\mathcal{L}^n$ も完備化の定義から, すぐ分る. ■

[定理 6.2 の証明] (前半) $2^A \subset \mathcal{L}^n \Longrightarrow m(A) = 0$ を示せば十分. しかも A は有界として示せば良い. ここで選択公理を用いれば次が示せる.

$$^\exists E \subset \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}^n} (q + E) \quad (\text{和は disjoint union}). \tag{1}$$

これと仮定から $^\forall q \in \mathbf{Q}^n, A \cap (q + E) \in \mathcal{L}^n$, $A = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}^n} A \cap (q + E)$. そこで $q \in \mathbf{Q}^n$ を固定し, $B := A \cap (q + E) \subset A$ とおけば, 仮定から $B \in \mathcal{L}^n$. よって $^\forall r \in \mathbf{Q}^n, r + B \in \mathcal{L}^n$. さらに $B \subset q + E$ より, $\{r + B\}_{r \in \mathbf{Q}^n}$ も互いに素. 有界集合 $C = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}^n; |r| \le 1} (r + B) \in \mathcal{L}^n$ に対し,

$$\infty > m(C) = \sum_{r \in \mathbf{Q}^n; |r| \le 1} m(r + B) = \sum_{r \in \mathbf{Q}^n; |r| \le 1} m(B) = \infty \cdot m(B).$$

これから $m(B) = 0$, 即ち, $m(A) = 0$. 残るは (1) の証明である. $x, y \in \mathbf{R}^n$ の同値関係 $x \sim y$ を $x - y \in \mathbf{Q}^n$ で定義. これによる同値類全体を $\mathcal{C}$ とする. 選択公理により, 各 $C \in \mathcal{C}$ の代表元 $x_C \in C$ を一つずつとることができるので, $E := \{x_C; C \in \mathcal{C}\}$ とする. このとき $C = x_C + \mathbf{Q}^n$ と表せて

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (x_C + \mathbf{Q}^n) = \bigcup_{x \in E} \bigcup_{q \in \mathbf{Q}^n} \{x + q\} = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}^n} (q + E).$$

上の和は全て, 素な和であることに注意. 従って (1) が成り立つ.

(後半) もし $2^{\mathbf{R}^n} = \mathcal{L}^n$ とすると, 上のことから $m(\mathbf{R}^n) = 0$ となり矛盾. ■

これから非可測集合の存在が言えたことになるが, さらに次の結果も知られている.

定理 6.3 $\mathcal{L}^n \supsetneq \mathcal{B}^n$.

証明は $\sharp\mathcal{B}^n = \aleph$ (連続無限) を認めてもらえば, 以下のように示せる. Cantor 集合のように連続濃度をもつ Lebesgue 測度 0 の集合があるので, その部分集合も全て $\mathcal{L}^n$ の元で, その全体の濃度は $\sharp 2^{\mathbf{R}}$. 従って, $\sharp\mathcal{L}^n = \sharp 2^{\mathbf{R}} > \sharp\mathbf{R} = \aleph = \sharp\mathcal{B}^n$.

更に, $\sharp\mathcal{B}^n = \aleph$ については, 簡単に言えば, $n = 1$ のとき, 基本集合 $(a, b]$ $(-\infty \le a \le b \le \infty)$ の全体からなる集合族の濃度は連続で, それらの元の可算回の集合演算で得られる集合全体を考え, 更にそれの可算回操作で, ということを, 無限に繰り返して得られる集合族が Borel 集合体 $\mathcal{B}^1$ となるので, その濃度は, 連続無限となる. (正確な証明は, 次節の最後に与える.) ■

7 積分順序の交換定理 (Exchange Theorems of Integral Order)

単調収束定理, Lebesgue の収束定理を正確に述べ, それらを用いて次の 1 から 3 を示せ.

問 7.1 $f_n \geq 0, \mu$-a.e. $(n = 1, 2, \cdots)$ ならば $\displaystyle\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$

問 7.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は可積分で, $\displaystyle\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$

問 7.3 $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ とする. $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ 互いに素なら $\displaystyle\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$

上の結果は, 可算和と積分の交換定理であるが, 実は, 全て Fubini の定理より明らかだとも言える.

この話に入る前に, 証明で必要となる定理を一つ述べておく.

7.1 単調族定理

定義 7.1 X のある部分集合族 $\mathcal{M}$ が**単調族**であるとは $[A_n \in \mathcal{M} \uparrow \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{M}]$ かつ $[A_n \in \mathcal{M} \downarrow \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{M}]$ をみたすときをいう. (つまり集合の単調増加・減少に関して閉じている.)

またかってな部分集合族 $\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A}$ を含む最小の単調族が存在し, それを $m(\mathcal{A})$ で表す. (証明は σ-field のときと同様である.)

問 7.4 σ-集合体ならば明らかに単調族となるが, $\mathcal{M}$ が単調族, かつ, 集合体なら σ-集合体となることを示せ.

定理 7.1 (単調族定理 (Monotone Class Theorem)) $\mathcal{A}$ が X の集合体なら $m(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

(証明) σ-集合体なら, 単調族なので $\subset$ は明らか. 逆は $m(\mathcal{A})$ が集合体であることを示せば十分. $\emptyset \in \mathcal{A} \subset m(\mathcal{A})$ は明らか. $\mathcal{M}_c := \{A \subset X; A^c \in m(\mathcal{A})\}$ は単調族となり $\mathcal{M}_c \supset m(\mathcal{A})$. よって $A \in m(\mathcal{A}) \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{A})$. 最後に $A, B \in m(\mathcal{A}) \Rightarrow A \cup B \in m(\mathcal{A})$ を言いたい! $A \in m(\mathcal{A})$ に対し, $\mathcal{M}_A := \{B \subset X; A \cup B \in m(\mathcal{A})\}$ は明らかに単調族で, さらに $\mathcal{M}_A \supset m(\mathcal{A})$ が示せるので, $A, B \in m(\mathcal{A}) \Rightarrow A \cup B \in m(\mathcal{A})$ をえて証明が終わる. $\mathcal{M}_A \supset m(\mathcal{A})$ について. まず $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A \Rightarrow m(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_A$. 即ち, $A \in \mathcal{A}, B \in m(\mathcal{A})$ なら $A \cup B \in m(\mathcal{A})$. 次に $A \in m(\mathcal{A})$ なら ${}^\forall B \in \mathcal{A}$ に対し, 直前の A, B を逆にして $A \cup B \in m(\mathcal{A})$, 即ち, $B \in \mathcal{M}_A$. よって $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A$ となり, $m(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_A$ をえる. ■

7.2 直積測度空間

まず $(X_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ $(j = 1, \cdots, n)$ を測度空間とする. (すぐに σ-有限測度空間に制限する.)

定義 7.2 (1) $X_1 \times \cdots \times X_n$ の部分集合 A が $A = A_1 \times \cdots \times A_n \quad (A_j \in \mathcal{F}_j, j = 1, \cdots, n)$ と表されるとき, A は**可測長方形**であるという.

(2) $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n := \sigma(X_1 \times \cdots \times X_n$の可測長方形全体) とおき, $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n)$ を**直積可測空間** (**product measurable space**) と呼ぶ.

定理 7.2 $\mu_j, j = 1, \cdots, n$ を σ-**有限測度**とする. このとき $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n)$ 上に次を満たす測度 μ が一意に存在する:

$$A = A_1 \times \cdots \times A_n \quad (A_j \in \mathcal{F}_j, j = 1, \cdots, n) \quad \text{に対し} \quad \mu(A) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n).$$

この定理は次の問と補題を用いて証明する.

定義 7.3 上の測度 μ を**直積測度** (**product measure**) といい, $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ で表す. また $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$ を**直積測度空間** (**product measure space**) という. また, $(\prod X_j, \bigotimes \mathcal{F}_j, \bigotimes \mu_j)$ とも表す.

問 7.5 $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \otimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3$ を示せ. (即ち, $\sigma(\sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) \times \mathcal{F}_3) = \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_3)$)

$\supset$ は明らか. 逆は $\sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) \times \mathcal{F}_3 \subset \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_3)$ を示せば良い. $^\forall A_3 \in \mathcal{F}_3$ を 1 つ固定し, $\mathcal{G} = \{B \subset X_1 \times X_2 ; B \times A_3 \in \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_3)\}$ とおけば, $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$; σ-field となり, $\sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) \subset \mathcal{G}$.

この問により上の定理の証明は $n = 2$ のときに示せば十分である.
そこで $(X, \mathcal{F}, \mu), (Y, \mathcal{G}, \nu)$ を σ-有限測度空間とする. $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ に対し,

$$A_x := \{y \in Y : (x, y) \in A\} \ (x \in X), \quad A^y := \{x \in X : (x, y) \in A\} \ (y \in Y)$$

とおいて, それぞれ A の x-**切片**, y-**切片**という.

補題 7.1 μ, ν を σ-有限測度とする. $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ に対し, 次が成立する:
(1) 各 $x \in X$ に対し, $A_x \in \mathcal{G}$ で $x \longmapsto \nu(A_x)$ は $\mathcal{F}$-可測関数,
(2) 各 $y \in Y$ に対し, $A^y \in \mathcal{F}$ で $y \longmapsto \mu(A^y)$ は $\mathcal{G}$-可測関数,
(3) $\displaystyle\int \nu(A_x)\mu(dx) = \int \mu(A^y)\nu(dy)$.

この補題の証明は次の 2 つの問の後に, 述べる.

問 7.6 上の補題において, σ-有限性の条件が必要であることを次の例で確かめよ:
$(\mathbf{R}, \mathcal{B}, \mu)$ を Lebesgue 測度空間, $(\mathbf{R}, 2^{\mathbf{R}}, \nu)$ を計数測度空間とし, $A = \{(a, a) : a \in \mathbf{R}\}$ とすると

$$\int_{\mathbf{R}} \nu(A_x)\mu(dx) \neq \int_{\mathbf{R}} \mu(A^y)\nu(dy)$$

となるが各辺の値はいくつか?

問 7.7 $\mathcal{A}$ を可測長方形の有限和で表される集合の全体とする. 次を示せ.
(1) その元は可測長方形の素な有限和で表される. (2) $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. (3) $\mathcal{A}$ は集合体である.

(補題の証明) 上の問の $\mathcal{A}$ の元に対しては明らかに成り立つ．まず μ, ν が有限測度のとき，補題をみたす集合の全体 $\mathcal{M}$ が単調族となることが容易に分かるので単調族定理と上の問より $\mathcal{M} \supset m(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ をえる．μ, ν が σ-有限のときは ${}^\exists X_n \in \mathcal{F} \uparrow X, Y_n \in \mathcal{G} \uparrow Y$; $\mu(X_n), \nu(Y_n) < \infty$ より $X_n \times Y_n$ に制限したところでは成り立つから, 単調収束定理より $n \to \infty$ としても成り立つ. ■

(定理の証明) $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ に対し,

$$(\mu \otimes \nu)(A) := \int \nu(A_x)\mu(dx) = \int \mu(A^y)\nu(dy)$$

とおくとこれが求めるものとなる．実際 $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ 上の測度なることは σ-加法性を調べればよいが, それは単調収束定理を用いて容易に示せる．一意性は $\mathcal{A}$ で一致することから簡単に分かる. ■

問 7.8 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ において, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ なる集合体 $\mathcal{A}$ があるとする．μ, ν が $\mathcal{A}$ 上で, 同時に σ-有限, かつ, $\mu = \nu$ ならば, $\mathcal{F}$ 上, $\mu = \nu$ を示せ.
但し,「μ, ν が $\mathcal{A}$ 上で, 同時に σ-有限」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists A_n \in \mathcal{A} : \bigcup A_n = X, \mu(A_n) < \infty, \nu(A_n) < \infty$.

7.3 Fubini の定理

定理 7.3 (Fubini の定理) $(X, \mathcal{F}, \mu), (Y, \mathcal{G}, \nu)$ を σ-**有限測度空間**とする.
f を $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-可測関数とする．このとき ${}^\forall y \in Y, x \mapsto f(x, y)$ は $\mathcal{F}$-可測関数, ${}^\forall x \in X, y \mapsto f(x, y)$, は $\mathcal{G}$-可測関数であり, 次が成立する:

(1) $f \geq 0, \mu \otimes \nu$-a.e. とすると

$$x \longmapsto \int f(x, \cdot)d\nu \quad \text{は } \mathcal{F}\text{-可測関数}, \quad y \longmapsto \int f(\cdot, y)d\mu \quad \text{は } \mathcal{G}\text{-可測関数}$$

であり,

$$\int fd(\mu \otimes \nu) = \int d\mu \int fd\nu = \int d\nu \int fd\mu.$$

(2) f を一般の可測関数とする．このとき

$$\int |f|d(\mu \otimes \nu), \quad \int d\mu \int |f|d\nu, \quad \int d\nu \int |f|d\mu$$

のうち 1 つでも有限ならば, その他のものも有限であり,

$$\int fd(\mu \otimes \nu) = \int d\mu \int fd\nu = \int d\nu \int fd\mu.$$

(証明) 前の補題において

$$\nu(A_x) = \int_Y 1_{A_x}(y)\nu(dy) = \int_Y 1_A(x, y)\nu(dy), \quad \mu(A^y) = \int_X 1_{A^y}(x)\mu(dx) = \int_X 1_A(x, y)\mu(dx)$$

と $\mu \otimes \nu$ の作り方 (上の定理の証明) に注意すれば, $f(x, y) = 1_A(x, y)$ $(A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ に対して成り立つことが分かる．後は単関数で近似して考えていけばよい. ■

問 7.9 2 重数列 $\{a_{ij}\}$ に対して次が成り立つことを Fubini の定理を用いて示せ.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty \text{ または } \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty \Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

問 7.10 $A, B \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ とする. 殆んど全ての $x \in X$ に対して $\nu(A_x) = \nu(B_x)$ ならば $\mu \otimes \nu(A) = \mu \otimes \nu(B)$ を示せ.

問 7.11 $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu), g \in L^1(Y, \mathcal{G}, \nu)$ に対し $fg \in L^1(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \otimes \nu)$ であり,

$$\int_{X \times Y} fg d\mu \otimes \nu = \int_X f d\mu \int_Y g d\nu$$

となることを示せ.

問 7.12 $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ とする. このとき

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \frac{\pi}{4}$$

となるが Fubini の定理に矛盾しないのは何故か?

最後に, 前節の E が非可測集合なることと定理 6.3 で用いた $\sharp\mathcal{B}^n = \aleph$ の証明を与えよう.

簡単のため, 1 次元で示す. まず, $E \subset [0, 1)$ として良い. $T_x F = x + F \bmod 1$ で定義してやれば, $[0, 1) = \bigcup T_{r_n} E$ $(\{r_n\} = [0, 1) \cap \mathbf{Q})$ で, しかも素和となる. そこでもし E が可測だとすると,

$$1 = \sum_{\geq 1} |T_{r_n} E| = \sum_{\geq 1} |E| = \infty \cdot |E|$$

となり矛盾する.

$\sharp\mathcal{B}^n = \aleph$ については, **順序数**=整列集合の順序型（順序同型により, 整列集合全体に同値関係を入れたときの同値類）を用いる. ちなみに**整列集合**とは, 全順序集合で, 任意の空でない部分集合が最小元をもつもの. 順序数を表すのに, $\emptyset$ のは 0 として, $\{1, 2, \ldots, n\}$ の同値類を n, $\mathbf{N}$ の同値類を ω とする. また, 順序数の濃度を, その同値類の元の一つ, 即ち, 代表元の濃度として定義する. 更に, 濃度が $\aleph_0$ の順序数は無数にあり, 最小のものが ω で, 次が $\omega + 1, \omega + 2, \ldots$ となる. 例えば, $\mathbf{N} \cup A$ の順序数は $A = \{1\}, \{1, 2\}, \mathbf{N}$ に応じて, $\omega + 1, \omega + 2, 2\omega$ となる. また, $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \cup \mathbf{N} \cup \cdots$ のは, $\omega^2 = \omega + \omega + \cdots$ となる. (順序は辞書式)

[$\sharp\mathcal{B}^n = \aleph$ の証明]

$\mathcal{A}_0$ を基本矩形 $\prod_{k=1}^n (a_k, b_k]$ の有限和で表される集合の全体とする. この元の可算個の極限集合として得られる集合全体を $\mathcal{A}_1$, 更に $\mathcal{A}_k$ を $\mathcal{A}_{k-1}$ から同様に定義する. 明らかに $\mathcal{A}_k$ は集合体で, 単調増加, しかも $\sharp\mathcal{A}_k = \aleph$. 更に, 濃度が $\aleph_0$ 以下である順序数 α に対し,

$$\mathcal{A}_\alpha = \{A = \lim A_k; A_k \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta\}$$

とおき,

$$\mathcal{A}_\infty := \bigcup_{\alpha; \sharp\alpha \leq \aleph_0} \mathcal{A}_\alpha$$

とすると明らかに集合体. しかも, 単調族となる. 実際, $A_n \in \mathcal{A}_\infty \uparrow$ or $\downarrow$ をとると, ${}^\exists\alpha_n; \sharp\alpha_n \leq \aleph_0, A_n \in \mathcal{A}_{\alpha_n}$. そこで, $\alpha = \sum \alpha_n$ とおけば, $\sharp\alpha \leq \aleph_0$ で, $A = \lim A \in \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_\infty$ となる. よって, $\mathcal{A}_\infty$ は σ-集合体. 従って, $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_\infty$ で, 明らかに $\sharp\mathcal{A}_\infty = \aleph$. ■

8 L^p-空間, 収束概念 (L^p-spaces, Convergence Notion)

$(X,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間とし, その上の可測関数の全体を $M(X,\mathcal{F},\mu)$ で表す.

定義 8.1 $L^p = L^p(X,\mathcal{F},\mu), 1 \le p \le \infty$: **$L^p$-空間**
(1) $1 \le p < \infty$ のとき,

$$L^p = L^p(X,\mathcal{F},\mu) := \{f \in M(X,\mathcal{F},\mu) : \|f\|_p < \infty\} \quad (\text{但し}, \|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p})$$

とおき, $f \in L^p$ は p **乗可積分**, または L^p-**関数**であるという.
(2) $p = \infty$ のとき,

$$L^\infty = L^\infty(X,\mathcal{F},\mu) := \{f \in M(X,\mathcal{F},\mu) : \|f\|_\infty < \infty\},$$

(但し, $\|f\|_\infty = \text{ess.sup}|f| := \inf\{\alpha : |f| \le \alpha, \mu-\text{a.e.}\}$: f の**本質的上限**) とおき, $f \in L^\infty$ は**本質的有界関数**, または単に L^∞-**関数**であるという. (このとき $|f| \le \|f\|_\infty < \infty, \mu$-a.e. となる)
(3) 上の $\|\cdot\|_p$ を **L^p-ノルム (norm)** といい, $\|\cdot\|_{L^p}$ と表すこともある.

定理 8.1 $1 \le p \le \infty, 1 \le q \le \infty, 1/p + 1/q = 1$ とする. 但し, 一方が 1 のとき, 他方は ∞ と考える. 次の 2 つの不等式は ∞ も含めて成り立つ. (右辺が有限である必要は無い.)
(1) **[Hölder の不等式]** $\|fg\|_1 \le \|f\|_p\|g\|_q$.
これより, $f \in L^p, g \in L^q$ なら $fg \in L^1$ も分る.
(2) **[Minkowski の不等式]** $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

(証明) いずれも $p = 1, \infty$ のときは明らか. $1 < p < \infty$ のときを考える. (1) $fg = 0$, μ-a.e. なら明らか. $A = \{fg \ne 0\}$ に対して $\mu(A) > 0$ として考える. log が上に凸より, $a, b > 0$ に対して $\frac{1}{p}\log a + \frac{1}{q}\log b \le \log\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$, i.e., $a^{1/p}b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ 後は $a = |f|^p / \int_A |f|^p d\mu, b = |g|^q / \int_A |g|^q d\mu$ を代入し, A 上で積分してやればよい.
(2) $q = p/(p-1)$, i.e., $1/p + 1/q = 1$ として

$$\int |f+g|^p d\mu \le \int |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int |g||f+g|^{p-1} d\mu$$

において $|f+g|^{p-1} \in L^q$ であることから Hoïder の不等式を用いて, さらに $1 - 1/q = 1/p$ に注意すれば求めるものがえられる. ■

問 8.1 上の証明を確かめよ.

定理 8.2 $(L^p, \|\cdot\|_p)$ $(1 \le p \le \infty)$ は μ-a.e. で等しいものを同一視することにより, $\|\cdot\|_p$ をノルムとして, Banach 空間 (完備なノルム空間) となる. また $p = 2$ のときには $\langle f, g\rangle = \int fg d\mu$ により L^2 に内積が定義され, $(L^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は Hilbert 空間 (完備な内積空間) となる. 但し, 複素数値のときは $\langle f, g\rangle = \int f\overline{g} d\mu$ と定義する.

(正確には問題 3.10 の同値関係をいれて, $f \in L^p$ の同値類 $[f] \in L^p/\sim$ に対し, $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ でノルムを定義すると $(L^p/\sim, \|\cdot\|_p)$ が Banach 空間となる. しかし実際, 扱うときにはこれらを同一視してもあまり問題がないため, 単に $(L^p, \|\cdot\|_p)$ が Banach 空間であるという言い方をすることが多い.)
ちなみに X を $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ 上の線形空間として, $\|\cdot\|$ がその上の**ノルム**であるとは $\|\cdot\| : X \to [0, \infty]$ 関数で $x, y \in X, a \in \mathbf{K}$ に対して次をみたすときをいう:

(1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$, (2) $\|ax\| = |a|\|x\|$, (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
このとき $(X, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**という
また X 上の点列 $\{x_n\}$ が **Cauchy 列** $\rightleftharpoons \lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$.

X の任意の Cauchy 列 $\{x_n\}$ が収束するとき, i.e., $^\exists x \in X; \|x_n - x\| \to 0$, X は $\|\cdot\|$ に関して**完備 (complete)** であるといい, このとき $(X, \|\cdot\|)$ を **Banach 空間**という

また $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が X 上の**内積 (inner product)** であるとは $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbf{K}$;

(1) $\langle x, x\rangle \geq 0, = 0 \iff x = 0$, (2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, (3) $\langle x, ay + z\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.
またこのとき $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を内積空間という．さらに $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ とおくとノルムとなり, このノルムで完備なとき **Hilbert 空間**という.

問 8.2 Cauchy 列のある部分列が収束すればそれ自身も同じ極限に収束することを示せ.

問 8.3 $(X, \|\cdot\|)$ complete $\iff$ $^\forall\{x_n\} \subset X; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, $^\exists \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$ を示せ.

(ヒント) $(\Leftarrow)$ $\{x_n\}$ Cauchy 列なら $^\exists\{x_{n_j}\}; \|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\| < 2^{-j}$ となり, x_{n_j} が収束することが示せる. (このような部分悦が取れることも説明せよ.)

(定理の証明) $^\forall\{f_n\} \subset L^p; \sum_n \|f_n\| < \infty$ に対して $^\exists f := \sum_n f_n$, μ-a.e. かつ $f \in L^p$ を示せばよい. $p < \infty$ なら, 単調収束定理より

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\right\|_p = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{N} |f_n|\right\|_p \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty.$$

$p = \infty$ のときは $\|\cdot\|_\infty$ のノルムの連続性より言える．よって $\sum_n |f_n| < \infty$, μ-a.e., これから $f = \sum_n f_n$ は μ-a.e. で存在する．しかも

$$\|f\|_p = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right\|_p \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\right\|_p < \infty$$

より $f \in L^p$ をえる. ■

問 8.4 $\mu(X) < \infty$ のとき, $1 \leq p < q \leq \infty$ に対し, $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \supset L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$ となることを示せ.

問 8.5 f, g を $\mathbf{R}$ 上の可測関数とする．f と g の**畳み込み** $f * g$; $f * g(x) := \int_{\mathbf{R}} f(x - y)g(y)dy$ に対し,
(1) $f, g \in L^1 \Rightarrow \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$, (2) $f \in L^1, g \in L^2 \Rightarrow \|f * g\|_2 \leq \|f\|_1\|g\|_2$ を示せ.

定義 8.2 (1) $1 \leq p < \infty$ とする. $f_n, f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ に対し f_n は f に p **乗平均収束** or **L^p-収束**する;

$$f_n \to f \quad \text{in } L^p \rightleftharpoons \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

(2) $f_n, f \in M(X, \mathcal{F}, \mu)$ とする．f_n は f に **μ-測度収束**する;

$$f_n \to f \quad \text{in } \mu \rightleftharpoons \text{任意の}\varepsilon > 0 \text{ に対し}, \lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) = 0.$$

(確率論では測度収束のことを**確率収束**といい, $\mu = P$ として "in μ" のかわりに "in P" や "in pr." とかく．)

問 8.6 μ 有限測度なら "**概収束 $\Longrightarrow$ 測度収束**" となることを示せ.

問 8.7 $f_n, f \in M(X, \mathcal{F}, \mu)$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ と $1 \leq p < \infty$ に対し,

$$\mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p d\mu.$$

を示し, "**L^p-収束 $\Longrightarrow$ 測度収束** " となることを確かめよ.

問 8.8 0 に測度収束しても L^1-収束しない例を挙げよ.

問 8.9 0 に測度収束しても 概収束しない例を挙げよ.

(ヒント) 問 8.8. $[0,1]$ Lebesgue 測度空間で, 平均 (積分) 値は 1 だが, 関数が 0 にならないところの長さが 0 に収束するもの. 問 8.9. 同様に定義関数列で 0 にならない区間が動き回りながら, その長さは 0 に収束するもの.

定理 8.3 (1) ある $1 \leq p \leq \infty$ に対し, 関数列が L^p-収束するなら, 測度収束する. 逆は一般にいえない.

(2) 測度収束するなら, 適当な部分列をとれば概収束するようにできる. 即ち

$$f_n \to f \quad \text{in } \mu \ (n \to \infty) \Longrightarrow {}^{\exists}\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}; f_{n_k} \to f, \quad \mu\text{-a.e.} \quad (k \to \infty).$$

(証明) (2) $\mu(\{|f_{n_k} - f| \geq 1/2^k\}) < 1/2^k$ をみたす部分列がとれるから, Borel-Cantelli の補題 (問題 1-11 (h) ($\sum \mu(A_k) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup A_k) = 0$) から $\mu(\lim f_{n_k} \neq f) = 0$ が従う.

問 8.10 上の証明を厳密に述べよ. (特に, 部分列が取れることと, 最後の部分を詳しく.)

9 外測度と測度の拡張定理 (Outer Measures and Extension Theorem of Measures)

第 2 節で測度の例として Lebesgue 測度を挙げたが, 実はそれが存在することの証明を与えていない. そのためにはまず区間の長さは分っている (決められている) から, それを区間で生成される σ-field, つまり Borel field 上へ拡張できるということを示せば良い. もう少し一般的に言うと集合体で定義された測度の元になる関数が, その集合体で生成される σ-field 上へ拡張できることを示す. それが次に述べる測度の拡張定理である.

9.1 測度の拡張定理

$(X, \mathcal{F}_1, \mu), (X, \mathcal{F}_2, \nu)$ をそれぞれ測度空間とし, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ とする. $\nu|_{\mathcal{F}_1} = \mu$, i.e., $\mathcal{F}_1$ 上 $\nu = \mu$ ならば μ は ν の**制限**, あるいは ν は μ の**拡張**という.

定理 9.1 (Carathéodory の拡張定理) $\mathcal{A}$ を X 上の集合体とする. 関数 $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ (集合関数という) が $\mu_0(\emptyset) = 0$ と $\mathcal{A}$ 上 σ-加法的, i.e.,

$$A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1, 2, \dots) \quad \text{disjoint かつ} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \implies \mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

をみたすなら, $(X, \sigma(\mathcal{A}))$ 上の測度 μ で $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ なるものが存在する. さらに μ_0 が $\mathcal{A}$ 上 σ-有限:

$$^{\exists}\{X_n\} \subset \mathcal{A}; \mu_0(X_n) < \infty, \bigcup X_n = X$$

なら μ は (明らかに σ-有限で,) 一意的に定まる.

この証明は最後に述べるが, 方針としてはまず任意の集合に対して定義される**外測度 (outer measure)** と呼ばれるものを導入し, それを $\sigma(\mathcal{A})$ 上に制限したものが求めるものとなることを示す.

問 9.1 定理の μ_0 は $\mathcal{A}$ 上, (有限) 加法性, 単調性, そして (有限) 劣加法性をみたすことを確かめよ.

この定理を用いて Lebesgue 測度の存在を示そう.

定理 9.2 (Lebesgue 測度の存在) $A = \prod_{k=1}^{n}(a_k, b_k]$ $(-\infty \le a_k \le b_k \le \infty, k = 1, 2, \dots, n)$ に対し, $\mu(A) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ を満たす $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n)$ 上の測度 μ が一意に存在する. これを Lebesgue 測度といい, 記号で $|\cdot|$ や dx また $m = m(dx)$ などと表す.

(証明) $n = 1$ で示せば十分. ($n \ge 2$ のときは直積測度を考えれば良いから.) $(a, b]$ $(-\infty \le a \le b \le \infty)$ の形の素な有限和で表される集合の全体を $\mathcal{A}$ とすれば, これは集合体となる ($\to$ 問題 1-2 (b)) . $A = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \in \mathcal{A}$ に対し, $m_0(A) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ と定義すれば, $m_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ 集合関数で $\mu_0(\emptyset) = 0$ をみたす. 後は拡張定理の最後の条件をみたすことを示せば良いが, それは

$$(c, d] = \bigcup_{j=1}^{\infty}(c_j, d_j](\text{素和}) \implies m_0((c, d]) = \sum_{j=1}^{\infty} m_0((c_j, d_j])$$

を示すことに帰着する．単調性と加法性より "$\geq$" はすぐ分かる．逆を示す．まず $-\infty < c < d < \infty$ とする． $0 < {}^\forall\varepsilon < d-c$, $[c+\varepsilon, d] \subset \bigcup_{j=1}^\infty (c_j, d_j + \varepsilon/2^j)$ で $[c+\varepsilon, d]$ コンパクトより ${}^\exists N$; $(c+\varepsilon, d] \subset [c+\varepsilon, d] \subset \bigcup_{j=1}^N (c_j, d_j+\varepsilon/2^j)$. よって単調性, 劣加法性より $d-(c+\varepsilon) = m_0((c+\varepsilon, d]) \leq m_0(\bigcup_{j=1}^N (c_j, d_j+\varepsilon/2^j)) \leq \sum_{j=1}^N (d_j + \varepsilon/2^j - c_j) < \sum_{j=1}^\infty (d_j - c_j) + \varepsilon$ となり, $\varepsilon > 0$ の任意性から $d - c \leq \sum_{j=1}^\infty (d_j - c_j)$, i.e., $m_0((c,d]) \leq \sum_{j=1}^\infty m_0((c_j, d_j])$ をえる． $c = -\infty$ or $d = \infty$ のときは, $m_0((c,d] = \infty$ で, ${}^\forall L > 0$ に対し, 今, 証明したことから,

$$m_0((-L,L] \cap (c,d]) = m_0(\bigcup_{j\geq 1}((-L,L] \cap (c_j, d_j])) = \sum_{j\geq 1} m_0((-L,L] \cap (c_j,d_j]) \leq \sum_{j\geq 1} m_0((c_j,d_j]).$$

$L \to \infty$ とすれば $m_0((-L,L] \cap (c,d]) \to \infty$ より, $\sum_{j\geq 1} m_0((c_j,d_j] = \infty = m_0((c,d])$ をえる． ■

9.2 外測度

定義 9.1 集合関数 $\mu^* : 2^X \to [0,\infty]$ が**外測度**とは次をみたすときをいう:
(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(2) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \subset \mu^*(B)$
(3) $A_n \in 2^X, n = 1, 2, \ldots \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$.
またこのとき次をみたす集合 $A \subset X$ を μ^*-**可測**という:

$${}^\forall Y \subset X, \quad \mu^*(Y) \geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c).$$

(条件 (1), (3) より, 逆の不等号が成り立つから, 上の "$\geq$" は実は "$=$" となる．)

補題 9.1 μ^* が X 上の外測度なら $\mathcal{F}^* = \{A \subset X; A \quad は\ \mu^*\text{-可測}\}$ は σ-field となり, μ^* は $(X, \mathcal{F}^*)$ 上の測度となる．

問 9.2 まず上の $\mathcal{F}^*$ が集合体であることを確かめよ．

$\emptyset \in \mathcal{F}^*$, $A \in \mathcal{F}^* \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}^*$ は明らか. $A, B \in \mathcal{F}^* \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}^*$ も容易に分かる．実際,

$$\mu^*(Y \cap (A \cup B)) = \mu^*(Y \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*(Y \cap (A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c \cap B)$$

に注意して

$$\begin{aligned} \mu^*(Y) &= \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \\ &= \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c \cap B) + \mu^*(Y \cap A^c \cap B^c) \\ &= \mu^*(Y \cap (A \cup B)) + \mu^*(Y \cap (A \cup B)^c). \end{aligned}$$

(補題 9.1 の証明) 互いに素な集合 $A_n \in \mathcal{F}^*, n = 1, 2, \ldots$ と ${}^\forall Y \subset X$ をとる．まず

$$\begin{aligned} \mu^*(Y \cap (A_n \cup A_{n+1})) &= \mu^*(Y \cap (A_n \cup A_{n+1}) \cap A_n) + \mu^*(Y \cap (A_n \cup A_{n+1}) \cap A_n^c) \\ &= \mu^*(Y \cap A_n) + \mu^*(Y \cap A_{n+1}) \end{aligned}$$

より, $\mu^*(Y \cap \bigcup_{n=1}^k A_n) = \sum_{n=1}^k \mu^*(Y \cap A_n)$. さらに $\bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{F}^*$ から

$$\mu^*(Y) = \sum_{n=1}^k \mu^*(Y \cap A_n) + \mu^*(Y \cap (\bigcup_{n=1}^k A_n)^c)$$

が成り立つ. 従って, 単調性より,

$$\mu^*(Y) \geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(Y \cap A_n) + \mu^*(Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c)$$

で, $k \to \infty$ とすれば,

$$\mu^*(Y) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap A_n) + \mu^*(Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c)$$

をえる. この式と σ-劣加法性より $\bigcup A_n \in \mathcal{F}^*$ が得られる. よって $\mathcal{F}^*$ は σ-field. また $Y = \bigcup A_n$ を代入すれば $\mu^*(\bigcup A_n) \geq \sum \mu^*(A_n)$ をえて, 逆も σ-劣加法性より分かるので μ^* が $\mathcal{F}^*$ 上, σ-加法性を持ち, 測度となる. ■

(拡張定理の証明) I. まず $^\forall Y \subset X$ に対し,

$$\mu^*(Y) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n); A_n \in \mathcal{A}, Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$$

とおけば, □ μ^* は X 上の外測度で, さらに□ $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}^*$ となることを示す.
□ 外測度の条件 (1), (2) は明らか. (3) を示す. $A_n \subset X, n = 1, 2, \ldots$ をとる. $^\forall\varepsilon > 0, ^\exists\{A_{n,k}\} \subset \mathcal{A}$; $A_n \subset \bigcup_k A_{n,k}$ かつ $\sum_k \mu_0(A_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$. よって μ^* の定義より

$$\mu^*(\bigcup A_n) \leq \sum_n \sum_k \mu_0(A_{n,k}) \leq \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

となり, $\varepsilon \downarrow 0$ として (3) をえる. □ $A \in \mathcal{A}$ とする. $^\forall Y \subset X, \varepsilon > 0$, $^\exists\{B_n\} \subset \mathcal{A}; Y \subset \bigcup B_n$ かつ $\sum \mu_0(B_n) \leq \mu^*(Y) + \varepsilon$. よって

$$\mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \leq \sum \{\mu_0(B_n \cap A) + \mu_0(B_n \cap A^c)\} = \sum \mu_0(B_n) \leq \mu^*(Y) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ と $Y \subset X$ の任意性より A は μ^*-可測, i.e., $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}^*$.
これらから $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}^*$ で, 前の補題から μ^* は $\mathcal{F}^*$ 上, σ-加法的であるから, $\sigma(\mathcal{A})$ 上でもそうである.

II. 次に仮定の μ_0 が $\mathcal{A}$ 上, σ-加法的であることを用いて $\mu^* = \mu_0$ on $\mathcal{A}$ を示す. $A \in \mathcal{A}$ をとる. μ^* の定義から $\mu^*(A) \leq \mu_0(A)$ は明らか. $^\forall\varepsilon > 0, ^\exists\{A_n\} \subset \mathcal{A}; A \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n$ かつ $\sum_{n\geq 1} \mu_0(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$. さらに仮定と μ_0 の単調性から $\mu_0(A) = \mu_0(\bigcup(A \cap A_n)) = \sum \mu_0(A \cap A_n) \leq \sum \mu_0(A_n)$. 従って $\mu_0(A) < \mu^*(A) + \varepsilon$ となり, $\varepsilon > 0$ の任意性から逆の不等式を得て, 等号が成り立つ.

III. 以上から $\mu := \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ とおくと, これが求めるものとなる. さらに μ_0 が $\mathcal{A}$ 上, σ-有限なら, 単調族定理を用いることにより, 一意性も示せる. ($\to$ 問 7.8 参照.) ■

問 9.3 拡張定理の証明の $(X, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ は完備測度空間であることを示せ.

問 9.4 拡張定理で, 一般に $\overline{\sigma(\mathcal{A})} \subset \mathcal{F}^*$ が成り立ち, 更に μ_0 が σ-有限なら, $\overline{\sigma(\mathcal{A})} = \mathcal{F}^*$, i.e., $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu)$ の完備化測度空間が $(X, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ と一致することを示せ.

定義 9.2 前の Lebesgue 測度 m の存在定理の証明における m_0 から定義される外測度 m^* に対して, m^*-可測な集合を **Lebesgue 可測集合**という. 即ち, Lebesgue 可測集合は Lebesgue 測度空間 $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n, m)$ を完備化した測度空間における可測集合である.

[まとめと問の解等]

X を集合, 2^X を X の全部分集合族, $\mathcal{A} \subset 2^X$ を集合体とし, $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{A})$ とおく.

μ_0 加法的集合関数 on $\mathcal{A}$, i.e., 有限加法性と $\mu_0(\emptyset) = 0$ をみたす, 任意の $Y \subset X$ に対し,

$$\mu^*(Y) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n); A_n \in \mathcal{A}, Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

また

$$A \in \mathcal{F}^* \overset{\text{def}}{\iff} \mu^*(Y) \geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \quad ({}^\forall Y \subset X)$$

とおくと σ-field で, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}^*$, i.e., $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$ で, μ^* は $(X, \mathcal{F}^*)$ 上の測度; $\mu^* = \mu_0$ on $\mathcal{A}$. さらに $\mu := \mu^*|_{\mathcal{F}}$ と定義.

前ページの問 9.3 と問 9.4 について

- **[問 9.3 「$(X, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ の完備性」について]**

  任意の μ^*-零集合が μ^* 可測であることを言えばよいが, μ^* が任意の集合に対し, 定義されているので, $\mu^*(A) = 0$ なら $A \in \mathcal{F}^*$ を示せば十分. $\mu^*(A) = 0$ とする. μ^* の単調性から $\mu^*(Y \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$, $\mu^*(Y \cap A^c) \leq \mu^*(Y)$. 従って, $\mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \leq \mu^*(Y)$ $({}^\forall Y \subset X)$. よって $A \in \mathcal{F}^*$. ■

- **[問 9.4 について]**

  「拡張定理で, 一般に $\overline{\sigma(\mathcal{A})} \subset \mathcal{F}^*$ が成り立ち, 更に μ_0 が σ-有限なら, $\overline{\sigma(\mathcal{A})} = \mathcal{F}^*$. 」

  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, $\mathcal{N}$ を μ-零集合の全体とする.

  (1) $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}^*$ について　(上の問と同様に示せる)

  $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}^*$ を示せば十分. $A \in \mathcal{N} \overset{\text{def}}{\iff} {}^\exists N \in \mathcal{F}; A \subset N, \mu(N) = 0$ で, μ の定義と μ^* の性質から $\mu^*(A) \leq \mu^*(N) = \mu(N) = 0$, i.e., $\mu^*(A) = 0$. よって上と同様に $\mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c) \leq \mu^*(Y)$ $({}^\forall Y \subset X)$. これより $A \in \mathcal{F}^*$. ■

  (2) μ_0 が σ-有限のとき $\overline{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}^*$ について

  μ_0 の拡張である μ^* も σ-有限であるから, μ^* が有限測度のとき示せば十分. ${}^\forall A \in \mathcal{F}^*, {}^\exists A_0 \in \mathcal{F}, C \in \mathcal{N}; A = A_0 \cup C$ を示せば良い. $A^c \in \mathcal{F}^*$ で, 外測度 μ^* の定義より, ${}^\forall n \geq 1, {}^\exists B_n \in \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}; A^c \subset B_n, \mu^*(A^c) \leq \mu(B_n) < \mu^*(A^c) + 1/n$ が言える. そこで $B = \bigcap B_n$ とおけば $A^c \subset B \in \mathcal{F}$, $\mu(B) = \mu^*(A^c)$. μ^* が有限であることから $\mu^*(A) = \mu^*(X) - \mu^*(A^c) = \mu^*(X) - \mu^*(B) = \mu^*(B^c)$. よって $A_0 := B^c \in \mathcal{F}$ とおけば $A_0 \subset A, \mu^*(A) = \mu(A_0)$ で, これより $C := A \setminus A_0$ とおけば容易に $C \in \mathcal{N}$ が言える. 実際, $\mu^*(C) = \mu^*(A) - \mu(A_0) = 0$ で, 外測度の定義より, 上と同様に ${}^\forall n \geq 1, {}^\exists C_n \in \mathcal{F}; C \subset C_n, \mu(C_n) < \mu^*(C) + 1/n = 1/n$. $N := \bigcap C_n \in \mathcal{F}$ とおけば $C \subset N$ かつ $\mu(N) = 0$, i.e., $C \in \mathcal{N}$. ■

- ちなみに

  「μ_0 が $\mathcal{A}$ 上で σ-有限 $\iff$ μ^* が σ-有限」が成り立つ.

  $(\Rightarrow)$ は明らかだが, $(\Leftarrow)$ は少し工夫がいる. ${}^\exists \{B_n\} \subset \mathcal{F}^*; \bigcup B_n = X, \mu^*(B_n) < \infty$. この B_n を $\mathcal{A}$ の元で上から近似すれば良い. (拡張定理の証明の前半を参照.)

10 測度の微分 (Differentials of Measures)

ここではまず $\mathbf{R}$ 上の測度について, 単調増加関数との関係について, 測度の拡張定理の応用として述べよう. さらに一般の測度について, 分解定理と測度の微分に相当する密度関数の存在に関する定理について述べる.

10.1 Lebesgue-Stieltjes 測度

$(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ を 1 次元 Borel 可測空間とする.

定理 10.1 μ を σ-有限測度 on $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ で, 有界区間上, 有限であるとする. このとき $^{\exists}F(x)$: 右連続左極限をもつ単調増加関数で, $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ をみたす. 逆に 右連続左極限をもつ単調増加関数 $F(x)$ に対し, 上をみたす測度 μ on $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ が唯一つ存在する.

定義 10.1 上の定理で関数 $F(x)$ に対して存在する測度 μ を **Lebesgue-Stieltjes 測度**といい, $dF(x)$ と表す. 即ち, $\int f d\mu$ を $\int f dF = \int_{\mathbf{R}} f(x) dF(x)$ と表す.

[定理 10.1 の証明]
前半は

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -\mu((x,0]) & (x < 0) \end{cases}$$

とおけば明らか.
後半は, 有限個の素な左半開区間の和全体 $\mathcal{A}$ 上で, $A = \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \in \mathcal{A}$ (素和) に対し,

$$\mu_0(A) := \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k))$$

と定義すれば, 集合体 $\mathcal{A}$ 上の加法的集合関数となる, i.e., $\mu_0(\emptyset) = 0$ と有限加法性をみたす. さらにこれが, Lebesgue 測度の存在定理の証明と同様に, $\mathcal{A}$ 上, σ-加法的であることを示すことができるので拡張定理により, 求める測度 μ の存在が示される. ■

10.2 Radon-Nikodym の定理

本節では $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする. (イメージとしては Lebesgue 測度空間と思って良い.)
ν を $(X, \mathcal{F})$ 上の他の測度とする. このとき ν の μ に対する分解定理を紹介する.

定義 10.2
(1) $\nu \ll \mu$; ν が μ に対し, **絶対連続 (absolute conti.)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $^{\forall}A \in \mathcal{F}; \mu(A) = 0, \nu(A) = 0$.
(2) $\nu \perp \mu$; ν と μ は**特異 (singular)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $^{\exists}E \in \mathcal{F}; \mu(E) = 0, \nu(E^c) = 0$.

例としては

- $f \in L^1(d\mu), f \geq 0$ に対し, $d\nu = f d\mu$, i.e., $\nu(A) = \int_A f d\mu$ とおくと $\nu \ll \mu$.
- また $E \in \mathcal{F}$ に対し, $\nu_1 := \mu|_E, \nu_2 := \mu|_{E^c}$ とおけば $\nu_1 \perp \nu_2$.

定理 10.2 可測空間 $(X,\mathcal{F})$ において, μ を σ-有限測度とする. このとき有限測度 ν on $(X,\mathcal{F})$ に対し, 次が成り立つ.

(1) (**Lebesgue 分解**) $\ ^\exists\nu_1,\nu_2$ 有限測度; $\nu=\nu_1+\nu_2, \nu_1\ll\mu, \nu_2\perp\mu$. この分解は一意.

(2) (**Radon-Nikodym の定理**) $\nu_1\ll\mu \iff {}^\exists f\in L^1(d\mu); f\geq 0, d\nu_1=fd\mu$.

この f は μ-a.e. で一意.

上の Radon-Nikodym の定理における f を $d\nu_1/d\mu$ と表し, ν_1 の μ に関する **Radon-Nikodym 微分**という.

(証明) μ が有限のときに示せば十分. 表現可能性については,

$$g\in\mathbf{G} \overset{\text{def}}{\iff} g\in M(X,\mathcal{F},\mu); g\geq 0, \int_A gd\mu\leq\nu(A)\ ({}^\forall A\in\mathcal{F}),$$

$\alpha:=\sup\left\{\int gd\mu; g\in\mathbf{G}\right\}\ (\leq\nu(X))$ とおく. ${}^\forall n\geq 1$ に対し, ${}^\exists g_n\in\mathbf{G}$; $\int g_n d\mu>\alpha-1/n$. そこで $f_n:=\max\{g_1,\ldots,g_n\}$ とおくと $f_n\in\mathbf{G}$. 実際, $A\in\mathcal{F}$ に対し, $A_k=A\cap\{f_n=g_k\}$ とおけば,

$$\int_A f_n d\mu=\sum_{k=1}^n\int_{A_k}f_n d\mu=\sum_{k=1}^n\int_{A_k}g_k d\mu\leq\sum_{k=1}^n\nu(A_k)=\nu(A).$$

従って $f_n\in\mathbf{G}$. そこで $f_n\uparrow f$ とすると単調収束定理より, $f\in\mathbf{G}$. また $f\geq g_n$ より, $\int fd\mu=\alpha<\infty$ をえる. 明らかに $f\geq 0$ で, $f\in L^1(d\mu)$. $d\nu_1:=fd\nu$ とし, $\nu_2:=\nu-\nu_1$ とおけばこれらが求めるものとなる. 後は $\nu_2\perp\mu$ と一意性を示せば良い.

これらの証明には有限符号付測度についての Hahn 分解 (Hahn-Jordan 分解) という結果を用いる. これは本質的には有限測度の差で表される測度 $\lambda=\lambda_1-\lambda_2$ に対し, ${}^\exists E\in\mathcal{F}$; $\lambda\geq 0$ on E, $\lambda\leq 0$ on E^c を意味する. (証明は本節の最後に.)

そこで, この結果を $\lambda_n:=\nu_2-\mu/n$, $n\geq 1$ に適用すると ${}^\exists E_n\in\mathcal{F}$; $\lambda_n\geq 0$ on E_n, $\lambda_n\leq 0$ on E_n^c. $A\in\mathcal{F}$ なら

$$\nu(A)\geq\nu_1(A)+\nu_2(A\cap E_n)\geq\nu_1(A)+\frac{1}{n}\mu(A\cap E_n)=\int_A(f+\frac{1}{n}1_{E_n})d\mu.$$

よって $\widetilde{f}=f+1_{E_n}/n$ とおけば $\widetilde{f}\in\mathbf{G}$. 従って

$$\alpha\geq\int\widetilde{f}d\mu=\int fd\mu+\frac{1}{n}\mu(E_n)=\alpha+\frac{1}{n}\mu(E_n).$$

故に $\mu(E_n)=0$. そこで $N=\bigcup_{n\geq 1}E_n$ とおけば $\mu(N)=0$. また ${}^\forall n\geq 1, N^c\subset E_n^c$ から

$$0\leq\nu_2(N^c)=\lambda_n(N^c)+\frac{1}{n}\mu(N^c)\leq\frac{1}{n}\mu(X)\to 0.$$

即ち $\nu_2(N^c)=0$. これから $\nu_2\perp\mu$ を得る.

一意性については μ について特異かつ絶対連続な有限測度は 0 のみであることから分かる. 実際, $\nu=\widetilde{\nu_1}+\widetilde{\nu_2}$ とも分解されたとすると, $\lambda:=\nu_1-\widetilde{\nu_1}=\widetilde{\nu_2}-\nu_2$ は, μ について特異かつ絶対連続となり, $\lambda=0$ を得る. ■

問 10.1 有限測度 μ に対し, 有限測度 λ が, $\lambda\perp\mu$ かつ $\lambda\ll\mu$ なら, $\lambda=0$ を示せ.

測度 μ に対し, $\mu(\{a\})>0$ なる $a\in X$ を μ の**質点 (point mass)** もしくは, **アトム (atom)**, と呼ぶ.

μ が質点全く持たないとき, **連続 (測度)** であるという.

μ が σ 有限であるとき, 質点はあっても高々可算個で, それを $\{a_n\}$ として, $\mu_d := \sum \delta_{a_n}$, $\mu_c := \mu - \mu_d$ とおけば, μ_c は連続となる. 即ち, $\mu = \mu_c + \mu_d$ と連続部分と離散部分に分解できる.

特に Lebesgue 測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, m)$ 上の (σ) 有限測度 μ については, $\mu_c = \mu_{ac} + \mu_{sc}$: 絶対連続+特異連続; $\mu_{ac}(dx) = {}^{\exists}f(x)dx$, $\mu_{sc} \perp m$. つまり, $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_d$ と 3 つに分解できることになる.

例 10.1 (Cantor 測度) $[0,1]$ を 3 等分して真ん中の開区間を除き, 残り 2 つの閉区間をそれぞれ 3 等分し, 真ん中をの開区間除く. この操作を繰り返して得られる残った集合を C と表し**カントール (Cantor) 集合**という. つまり $x \in C \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x = 0.x_1x_2x_3\cdots$ (3 進法) と表したとき, $x_n = 0$ or 2. (つまり, 3 進法表示で 1 が 1 つも現れない表示を持つ [0,1] 内の数の全体.) より正確には $x = \sum_{n\geq 1} x_n/3^n$ $(x_n = 0, 1, 2)$ と表したとき, x_n に 1 が 1 つもない表現を持つことができる数の全体である. (例えば 0.1 (3 進法) は $0.02222\cdots$ (3 進法) とも表せるので, C の元である.)

$m(C) = |C| = \lim(2/3)^n = 0$, 即ち, Cantor 集合の長さは 0 である.

また, 単調増加関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ を, $f(0) = 0, f(1) = 1$ として, この Cantor 集合の作り方を元にして, 最初に抜く開区間上では $f = 1/2$, 次に抜く区間で順に $f = 1/2^2, 3/2^2$, さらに次も同様に, 抜く 4 つの開区間の 0 から近い順に $f = 1/2^3, 3/2^3, 5/2^3, 7/2^3$ と決める. これを続けて行くと, Cantor 集合以外では, 区分的に定数となる増加関数が定義される. さらにこれは $[0,1]$ 上に連続かつ増加となるように拡張することができる. 即ち, Cantor 集合の上だけで真に増加となる関数となる. これを **Cantor 関数**と呼ぶ. 実際には, $x = 0.x_1x_2\cdots$ (3 進法) に対し, $n_0 = min\{n; x_n = 1\} (= \infty \text{ if } \{\cdot\} = \emptyset)$ とし, $y_n = x_n/2$ $(n < n_0)$, $= 1$ $(n = n_0)$, $= 0$ $(n > n_0)$ に対し, $f(x) = 0.y_1y_2\cdots$ (2 進法) と定義される.

この Cantor 関数に対応する $[0,1]$ 上の Lebsgue-Stieltjes 測度 μ が存在するが, これを **Cantor 測度**という. これは Lebesgue 測度に対し, 特異測度である $(\mu \perp m)$. しかも f が連続であることから, μ もそうである. 即ち, $\mu = \mu_{sc}$ となる.

以下 $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, m)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間とする. このもとで, 更に, 重要な結果としては, 以下がある.

$\mathcal{O}$ を開集合の全体, $\mathcal{C}$ を閉集合の全体とする.

定理 10.3 (Lebesgue 測度の正則性) ${}^{\forall}A \in \mathcal{B}, {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}G \in \mathcal{O}, F \in C; F \subset A \subset G, m(G \setminus A) < \varepsilon, m(A \setminus F) < \varepsilon.$

(証明) 外測度 m^* の定義を用いれば, 容易に示せる. 実際, ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し, まず $m(A) < \infty$ のとき, m^* の定義より, ${}^{\exists}A_n = \sum_{k=1}^{K_n}(a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]; A \subset \bigcup A_n, m(A) = m^*(A) \leq \sum m_0(A_n) < m(A) + \varepsilon/2$. そこで, $B_n = \bigcup_k (a_k^{(n)}, b_k^{(n)} + \varepsilon/2^{n+k+1})$ とおけば, $m(B_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^{n+1}$ より, まず $G = \bigcup B_n$ が求めるもの. $m(A) = \infty$ のときは, $A_n = A \cap \{n - 1 \leq |x| < n\}$ に対し, 示したことから, ${}^{\exists}G_n \in \mathcal{O}; A_n \subset G_n, m(G_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$ で, $G = \bigcup G_n$ が求めるもの.

次に, A^c に対し, ${}^{\exists}G \in \mathcal{O}; m(G \setminus A^c) < \varepsilon$ より, $F = G^c$ が求めるもの. ■

定理 10.4 単調増加関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は殆ど至る所, 微分可能である, i.e., $f \uparrow$ on $\mathbf{R} \Rightarrow {}^{\exists}f'$ a.e.

この証明には, 次の結果を用いる.

定理 10.5 (Vitali の被覆定理) *Lebesgue* 外測度 m^* に対し, $A \subset \mathbf{R}$; $m^*(A) < \infty$ とする. このとき, 長さが 0 でない閉区間の族 $\mathcal{I}$ が,

$$^\forall x \in A, ^\forall \varepsilon > 0, ^\exists I \in \mathcal{I}; x \in I, m(I) < \varepsilon$$

を満たしていれば, $^\exists \{I_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{I}$; 高々可算個で, *disjoint*, $m^*\left(A \setminus \bigcup I_n\right) = 0$.

(証明) $I_1 \in \mathcal{I}$ を任意に 1 つ取り, $I_1, \ldots, I_n$ が互いに素に取れたとして, $A \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ なら終わりで, そうでなければ,

$$a_n := \sup\left\{ m(I); I \in \mathcal{I}, I \cap \bigcup_{k=1}^{n} I_k = \emptyset \right\}$$

とおく. ($a_n > 0$, 即ち, この条件を満たす I があることは, $\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)^c$ が開集合であることと, 仮定から分る.) このような I のうち $m(I) \geq a_n/2$ を満たすものを 1 つ取り, それを I_{n+1} として, この操作で得られる $\{I_n\}$ が求めるものとなる. 実際, $\delta := m^*\left(A \setminus \bigcup I_n\right) > 0$ とすると矛盾が示せる. まず, $^\exists G \supset A$; open; $m(G) < \infty$ が取れてしかも, $\mathcal{I}$ の全ての元を含むようにできる. (必要なら ε 膨らませれば良い.) よって, $\sum m(I_n) \leq m(G) < \infty$. $\delta > 0$ より, $^\exists N; \sum_{n>N} m(I_n) < \delta/5$ とできる. $B = A \setminus \bigcup_{n\leq N} I_n$ とおけば, $B \neq \emptyset$ より, $^\forall x \in B$ に対し, $^\exists I \in \mathcal{I}; x \in I, I \cap \bigcup_{n\leq N} I_n = \emptyset$. もし, 全ての k に対し, $I \cap \bigcup_{n\leq k} I_n = \emptyset$ なら, $m(I) \leq a_k \leq 2m(I_{k+1}) \to 0$ となり, 長さが 0 でないことに反する. 従って, $I \cap I_k \neq \emptyset$ となる最小の k が存在する. このとき, $k > N$ で. $m(I) \leq a_{k-1} < 2m(I_k)$ より, x と I_k の中点の距離は, $m(I) + m(I_k)/2 < (5/2)m(I_k)$ を超えない. よって $n > N$ に対し, J_n を I_n の中点を中心に 5 倍したものとすると, $x \in J_k \subset \bigcup_{n>N} J_n$. 即ち, $B \subset \bigcup_{n>N} J_n$ となり, $\delta \leq m^*(B) \leq \sum_{n>N} m^*(J_n) = 5\sum_{n>N} m^*(I_n) < \delta$ となり, 矛盾. ■

【定理 10.4 の証明】

$f : [a.b] \to \mathbf{R} \uparrow$ $(-\infty < a < b < \infty)$ に対し, 示せば良い.

$$D^{\pm} f(x) := \limsup_{h\downarrow 0} \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}, \quad D_{\pm} f(x) := \liminf_{h\downarrow 0} \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$$

に対し, $\{D^+ f > D_- f\}, \{D^- f > D_+ f\}$ が零集合であることを示せば良い. ($D^+ f \leq D_- f, D^- f \leq D_+ f$ a.e., 即ち, $D^+ f \leq D_- f \leq D^- f \leq D_+ f \leq D^+ f$ a.e. となり, 全て等しくなる.)

$^\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Q}; \alpha > \beta$ に対し, $A(\alpha, \beta) = \{D^+ f > \alpha > \beta > D_- f\}$ として, $m^*(A(\alpha, \beta)) = 0$ を示せば良い. $\delta = m^*(A(\alpha, \beta))$ とおく. $^\forall \varepsilon > 0$ に対し, m^* の定義より, $^\exists G$ open; $A(\alpha, \beta) \subset G, m(G) < \delta + \varepsilon$. 各 $x \in A(\alpha, \beta)$ に対し, $D_- f(x) < \beta$ より, $^\exists h > 0; [x - h, x] \subset G$, かつ, $\dfrac{f(x) - f(x - h)}{h} < \beta$ とできる. この $[x - h, x]$ の全体を $\mathcal{I}$ とすると, $h > 0$ が, いくらでも小さいものが取れることから, $\mathcal{I}$ は Vitali の被覆定理の条件を $A(\alpha, \beta)$ に対して満たす. 従って, その定理から, $^\exists I_n := [x_n - h_n, x_n] \in \mathcal{I}$ $(n = 1, \ldots, N)$; disjoint,

$$m^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \varepsilon, \text{ i.e., } m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) > \delta - \varepsilon$$

とできる. このとき,

$$\sum_{n=1}^{N} (f(x_n) - f(x_n - h_n)) < \beta \sum_{n=1}^{N} h_n \leq \beta m(G) < \beta(\delta + \varepsilon)$$

を満たす．次に，$I_n^o = (x_n - h_n, x_n)$ として，各 $y \in A \cap \bigcup_{n=1}^N I_n^o$ に対し，$D^+ f(y) <> \alpha$ より，$^\exists h' > 0, ^\exists n; x[y, y+h'] \subset I_n^o$，かつ，$\dfrac{f(y+h') - f(y)}{h'} > \alpha$ とできる．この $[y, y+h']$ の全体を $\mathcal{I}'$ とすれば，$A \cap \bigcup_{n=1}^N I_n^o$ に対し，上と同様に Vitali の被覆定理より，$^\exists I_n' = [y_n, y_n + h_n'] \in \mathcal{I}'$ $(n = 1, \ldots, M)$; disjoint,

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^N I_n \cap \bigcup_{n=1}^M I_n'\right) > \delta - \varepsilon - \varepsilon = \delta - 2\varepsilon$$

とできる．各 I_n' はどれかの I_n に含まれるので,

$$\sum_{n=1}^N (f(x_n) - f(x_n - h_n)) \geq \sum_{n=1}^M (f(y_n + h_n') - f(y_n)) > \alpha \sum_{n=1}^N h_n' \geq \alpha(\delta - 2\varepsilon).$$

従って，$\beta(\delta + \varepsilon) > \alpha(\delta - 2\varepsilon)$ となり，$\beta\delta > \alpha\delta$ を得るが，$\alpha > \beta$ だったので，$\delta = 0$ となる． ■

この定理により,

定理 10.6 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の有限測度 ν が $\nu \ll m$ を満たすとする．$F(x) := \nu((-\infty, x])$ に対し，$^\exists F'$ *a.e.* で，$F' = d\nu/dm$ *a.e.*

これから，右連続左極限をもつ単調増加関数 F に対応する Lebesgu-Stiltjes 測度 dF に対し，$dF = dF_{ac} + dF_{sc} + dF_d$ と分解すると，$dF_{ac}(x) = F'(x)dx$, $dF_d = \sum_{x;\Delta F(x)>0} \Delta F(x)\delta_x$ で与えられる．但し，$\Delta F(x) := F(x) - F(x-)$ で，F の**跳び (jump)** と言う．

つまり，増加関数の跳びは測度の離散部分に、連続部分はそれに、更にその中で，微分可能な部分は絶対連続部分に，微分できない部分で、跳び以外の部分が，特異連続部分に対応する．

最後に Radon-Nikodym の定理の証明で用いた **Hahn-Jordan 分解**の証明について述べる．

可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上において，ν が**有限符号付測度**であるとは，$\nu : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ 以外は測度と同じ条件を満たすときをいう．即ち，$\nu(\emptyset) = 0$ と σ 加法性を満たす．

以下 ν を有限符号付測度とする．

$^\forall A \in \mathcal{F}$ に対し,

$$|\nu|(A) := \sup\{\sum_{k=1}^n |\nu(A_k)|; \{A_k\} \text{ は } A \text{ の有限可測分割 }\}$$

とおく．(これは有限測度となることが示せる.) また，$\|\nu\| = |\nu|(X)$ を ν の**全変動 (total varieation)** という．

$\nu^+ = (|\nu| + \nu)/2, \nu^- = (|\nu| - \nu)/2$. このとき，$\nu = \nu^+ - \nu^-$, $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ を満たし，更に，$\nu^+(E) = \sup\limits_{F \in \mathcal{F}; F \subset E} \nu(F)$, $\nu^+(E) = -\inf\limits_{F \in \mathcal{F}; F \subset E} \nu(F)$. が示せる．(これについては，次の証明の最初と同様に示せる.)

[Hahn 分解 $^\exists E \in \mathcal{F}; \nu \geq 0$ on E, $\nu \leq 0$ on E^c の証明]

まず $\nu^+(X) = \sup_{F \in \mathcal{F}} \nu(F)$ が成り立つ．実際，$^\forall F \in \mathcal{F}$ に対し，ν^+ の定義から単調性が分るので，$\nu(F) \leq \nu^+(F) \leq \nu^+(X)$ より，$\sup_{F \in \mathcal{F}} \nu(F) \leq \nu^+(X)$ で，更に，$^\forall \varepsilon > 0$ に対し，$|\nu|$ の定義から，$^\exists F_0 \in \mathcal{F}; \nu(F_0) \geq 0, \nu(F_0^c) \leq 0$, $|\nu|(X) \leq \nu(F_0) - \nu(F_0^c) + \varepsilon$ が容易に分る．$\nu(X) = \nu(F_0) + \nu(F_0^c)$ から,

$$\nu^+(X) = \frac{1}{2}(|\nu|(X) + \nu(X)) \leq \nu(F_0) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \sup_{F \in \mathcal{F}} \nu(F) + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

よって, $\nu^+(X) \leq \sup_{F\in\mathcal{F}} \nu(F)$ が成り立つ.

このことから ${}^\exists E \in \mathcal{F}; \nu^+(X) = \nu(E)$ が成り立つ. ${}^\forall n \geq 1, {}^\exists E_n \in \mathcal{F}; \nu^+(X) \geq \nu(E_n) > \nu^+(X) - 1/2^n$ で, $E := \limsup E_n$ が条件を満たす. 実際, ${}^\forall G \in \mathcal{F}; G \subset E_n$ に対し, $\nu(E_n) = \nu(G) + \nu(E_n \setminus G)$ と, $\nu(E_n \setminus G) \leq \nu^+(X)$ より, $\nu(G) + \nu^+(X) \geq \nu(E_n) > \nu^+(X) - 1/2^n$ となり, $\nu(G) > -1/2^n$. よって,

$$\begin{aligned} \nu^+(X) \geq \nu\left(\bigcup_{n\geq N} E_n\right) &= \nu(E_N) + \sum_{n>N} \nu\left(E_n \setminus \bigcup_{k=N}^{n-1} E_k\right) \geq \nu(E_N) - \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} \\ &\geq \nu^+(X) - \sum_{n\geq N} \frac{1}{2^n} = \nu^+(X) - \frac{1}{2^{N-1}}. \end{aligned}$$

$N \to \infty$ として, $\nu(E) = \nu(\limsup E_n) = \lim_{N\to\infty} \nu(\bigcup_{n\geq N} E_n) = \nu^+(X)$ をえる.

これから ${}^\forall A \in \mathcal{F}; A \subset E$, $\nu^+(X) = \nu(E) = \nu(A) + \nu(E \setminus A) \leq \nu(A) + \nu^+(X)$ で, $\nu(A) \geq 0$, i.e., $\nu \geq 0$ on E となる. また ${}^\forall B \in \mathcal{F}; B \subset E^c$, $\nu^+(X) \geq \nu(B \cup E) = \nu(B) + \nu(E) = \nu(B) + \nu^+(X)$ より, $\nu(B) \leq 0$, i.e., $\nu \leq 0$ on E^c. ■

[Jordan 分解] 有限符号付測度は, 2 つの有限測度の差に分解できる. 即ち, ${}^\exists \nu_1, \nu_2$: 有限測度; $\nu = \nu_1 - \nu_2$.

実際, Hahn 分解での E を用いて, $\nu_1 = \nu|_E, \nu_2 = -\nu|_{E^c}$ とおけば良い. ちなみに, 任意の有限測度 μ に対して, $\nu = (\nu_1 + \mu) - (\nu_2 + \mu)$ も Jordan 分解となるので, この分解は一意ではない.

更に, $\nu^+ = \nu|_E, \nu^- = -\nu|_{E^c}$ が成り立つので, $|\nu| = \nu^+ + \nu^- = \nu|_E - \nu|_{E^c}$ と表せて, これは有限測度となる.

11 確率論 (Probability Theory)

確率論において測度論の導入は必然であったといえる. 例えば, 表裏のでる確率が 1/2 のコインを有限回 (n 回) 投げる試行においては, どんな表裏の組み合せも (それを根元事象というが) すべて $1/2^n$ の確率で起こりうるので, それからどんな事象でも確率を計算することはできる. けれど無限に投げ続けるという試行を考えた途端, 根元事象 (表裏の無限の組み合せ) の起こる確率はすべて 0 となってしまう. 即ち, 根元事象の確率だけですべての事象の確率を測るのは無理ということになる.

しかし実用上は, 我々はすべての確率を知る必要は無く, 必要な事象についてのみ, 分かれば十分である. そこで確率が測れる集合だけ集めて, その上で話を展開すればいいということになる. それがまさに可測集合族 (σ-field) であり, その上の確率を測度 (確率測度) として考えればいいということになる.

前にも述べたように確率論では $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で, 測度空間にあたる**確率空間 (probability space)** を表し, $A \in \mathcal{F}$ を**事象 (event)**, $P = P(d\omega)$ を**確率測度 (probability measure)** または単に **確率**という. さらにその上の可測関数 $X = X(\omega)$ を**確率変数 (random variable)**, その積分を**平均値 (mean)** または**期待値 (expectation)** と呼び,

$$E[X] := \int XdP = \int X(\omega)P(d\omega)$$

で表す. さらに事象 $A \in \mathcal{F}$ 上の平均を $E[X; A] := E[X1_A]$ で表す. また**分散 (variance)** を $V(X) := E[(X - EX)^2] = E[X^2] - E[X]^2$ で定義する.

以下では簡単のため, 確率変数はすべて実数値として考える.

定義 (1) 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が**独立 (independent)** とは任意の $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ に対し,

$$P(X_1 \le a_1, \ldots, X_n \le a_n) = P(X_1 \le a_1) \cdots P(X_n \le a_n).$$

(2) 確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ が独立とは任意の n に対し, $X_1, \ldots, X_n$ が独立なときをいう.

補題 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が独立であることと次は同値:

(1) 任意の $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ に対し,

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n).$$

(2) 任意の有界 Borel 関数 $f_1, \ldots, f_n$ に対し,

$$E[f_1(X_1) \cdots f_n(X_n)] = E[f_1(X_1)] \cdots E[f_n(X_n)].$$

1. 上の補題を証明せよ.

コインを投げ続けていくと表と裏の出る割合が段々 1/2 に近付くということは経験上 (もしくは教え込まれて) 知っているであろう. これが実は大数の法則と呼ばれるもので, コイン投げは 1 回 1 回が独立な試行で, 例えば n 回目の試行で確率変数 X_n を表が出たら 1, 裏が出たら 0 と決めるとその (確率) 平均は $E[X_n] = 1/2$ で, n 回までに表の出る割合は算術平均 $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n$ で与えられる. 試行回数 n を大きくして行ったとき, この算術平均が確率平均に近付くというのが大数の法則である. それを数学的に正確に述べると次のようになる:

定理 [大数の法則 (Law of Large Numbers)]

$X_1, X_2, \ldots$ を独立な確率変数で, 平均一定 $EX_n = m$, 分散が有界 $\sup V(X_n) < \infty$ であるとする. このとき次が成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = m, \quad \text{a.s., i.e.,} \quad P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m) = 0\right) = 1.$$

この定理を証明するのはそう簡単ではない. そこで本講義ではもっと強い条件 $\sup E[X_n^4] < \infty$ のもとで成り立つことを示す.

(条件 $\sup E[X_n^4] < \infty$ のもとでの証明)

X_n の代わりに $X_n - m$ を考えることにより, $m = 0$, i.e., $E[X_n] = 0$ として示せばよい. まず $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4$ の展開式を考えるのだが, 独立性と平均が 0 ということと, さらに Hölder の不等式により, $E[X^2] \le (E[X^4])^{1/2}$ が成り立つことに注意して,

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4\right] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k^4] + \sum_{i\neq j, 1\le i,j\le n} E[X_i^2]E[X_j^2] \le n^2 \sup_k E[X_k^4]$$

をえるから, 単調収束定理を用いて

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4\right] \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sup_k E[X_k^4] < \infty$$

をえる. これは $P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\right) = 1$ を意味する.

さて上の定理から算術平均と確率平均の差が 0 へ近付くことは分ったが,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m \to 0 \quad (n\to\infty)$$

ではその誤差をさらに詳しく評価できないのだろうか？　そこで考えるのは上で n で割っているのを, もっと小さいオーダーのもの (例えば $\sqrt{n}$) で割れば, 何か見えてこないか？　ということである. 実際, それは出てくるのだが, それは何か確率変数などに, 直接, 収束 (概収束) するというのではなく, 誤差の分布がある分布 (正規分布＝ Gauss 分布) に収束するのである. これが中心極限定理といわれるもので, 統計学などの基本となるものである.

ここでは定理を述べるだけにとどめておくが, 証明に興味のある人は自分で調べるか, もしくは 4 年のゼミで勉強してもらいたい.

定理 [中心極限定理 (Central Limit Theorem)]

$X_1, X_2, \ldots$ は独立な確率変数で, すべて同じ分布をもつとする. 平均 $EX_n = m \in \mathbf{R}$, 分散 $V(X_n) = v \in (0,\infty)$ とする. このとき次が成り立つ: 任意の $a \ge b$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m) \le b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-x^2/(2v)} dx.$$

即ち, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$ の分布が平均 0, 分散 v の正規分布 $N(0,v)$ に収束する.

さらなる話題として

1. σ-field での条件付き確率の定義

   また測度の拡張定理からえられる

2. 無限次元直積測度

3. Kolmogorov の拡張定理

などは無限の時間を持つ確率過程 $\{X_n = X_n(\omega)\}_{n=1,2,\ldots}$, $\{X_t = X_t(\omega)\}_{t\geq 0}$ を定義するのに必要不可欠である. 特に確率過程論で重要な役割を果たすのが「**ブラウン運動 (Brownian motion)**」と呼ばれるもので, 水面に浮かんだ花粉のランダムな運動を表すのだが, あの物理で有名な A. Einstein も論文を書いていて, 最終的に N. Wiener によって数学的に導入され, **Wiener 過程**とも呼ばれている. このブラウン運動を基本とした確率過程論において日本人でも「伊藤　清」先生が**伊藤積分**と呼ばれる確率過程による積分を定義され, さらに**伊藤の公式**と呼ばれる, 今日の確率解析では常識となっている大変重要な公式を発見されている.

現在, 確率論は非常に広い範囲に渡って, 応用され, 発展して行っている. 物理などではかなり昔から, 電子の確率的挙動など. (Einstein はそれを認めず, 「神様はサイコロ遊びなど, なさらない!」と言ったという.) 生物では遺伝子の突然変異を組み込んだ, 遺伝学への応用や, 子を生んで, また老いて死んで行くという人口モデルなどがある. また化学では高分子合成において, 媒体上にできる様子を確率方程式として表すなど. 経済では株価の変動を確率過程として, 証券市場などで新しい商品を開発したときにその価格をどう決めればいいかを導くための理論である数理ファイナンスなどの分野へという具合に.

このように測度論を元にして, 確率論は広い, 深い世界を手に入れたのだが, 現在, さらにその先を行くものとして, コンピューターでのシミュレーションによって複雑な確率過程の挙動を推定し, そこから理論を組み立てるという方法もとられている. これらのことに興味のある人は, 是非, 自分の興味と確率論を組み合せて, さらに新しい世界を見い出して行って欲しい.

ルベーグ積分論　試験問題 1

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする.

1. $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \mathcal{F} = 2^X, \mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n}$ $(a_n > 0)$ とする. X 上の関数 f に対し $\int f d\mu$ の積分を実行し, 数列の和を用いて表せ.

2. $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$ に対し, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

3. $(0,1) \times X$ 上の可測関数 $f(t,x)$ が, 各 $t \in (0,1)$ に対し x の関数として可積分で, μ-a.e. $x \in X$ に対し, t について連続であるとする. そこで
$$F(t) := \int_X f(t,x)\mu(dx)$$
とおく. このとき次を示せ.
   (a) $^{\exists}h \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu); \sup_t |f(t,\cdot)| \le h, \mu$-a.e. ならば $F(t)$ は連続.
   (b) 更に $f(t,x)$ が μ-a.e. $x \in X$ に対し, t について微分可能で, また $^{\forall}t \in (0,1), ^{\exists}\delta = \delta(t) > 0$ (定数), $^{\exists}g_t = g_t(x) \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$($x$ の可積分関数); 次を満たすなら $F(t)$ は微分可能.
$$\sup_{s\in(-\delta,\delta); s\neq 0, t+s\in(0,1)} \frac{|f(t+s,x) - f(t,x)|}{s} \le g_t(x), \quad \mu(dx)\text{-a.e.}$$

4. $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$ を Lebesgue 測度空間, $([0,1], 2^{[0,1]}, \nu)$ を計数測度空間とし, $f(x,y) = 1$ if $x = y$, $f(x,y) = 0$ if $x \neq y$ とおく. このとき
$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\mu(dx) \right) \nu(dy) \neq \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\nu(dy) \right) \mu(dx)$$
となるが各辺の値はいくつか？また f は非負関数なのに Fubini の定理に矛盾しないのはなぜか？

5. $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), dx)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間とする.
$f \in L^1, g \in L^2 \Rightarrow \|f * g\|_2 \le \|f\|_1 \|g\|_2$　を示せ.
(ヒント): $|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{1/2} \cdot |f(x-y)|^{1/2}|g(y)|$ とみて Hölder, そして Fubini.
または Fubini を用いてから, Hölder で $\int_{\mathbf{R}} |g(y-x)g(z-x)|dx \le \|g\|_2^2$ を示す.)

ルベーグ積分論　試験問題 2

一般に $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし, また $1 \leq p < \infty$ に対し, (測度 μ に関して) p 乗可積分な可測関数の全体を $L^p = L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ で表す. すなわち

$$L^p = \left\{ f; \|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

さらに $L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ で (測度 μ に関して) ほとんどすべての点で有界な関数を表し, $\|f\|_\infty =$ess.sup $|f|$ とおく. 但し ess.sup$|f| = \min\{M \geq 0; |f| \leq M, \mu\text{-a.e.}\}$.

1. $f, f_n \in L^1$ かつ $f_n \to f$, μ-a.e. とする. このとき $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1 \Longrightarrow f_n \to f$ in L^1, つまり $\displaystyle\int |f_n| d\mu \to \int |f| d\mu \Longrightarrow \int |f_n - f| d\mu \to 0$ が成り立つことを Lebesgue の収束定理を用いて示せ.
   (ヒント)　$\Big| |f_n - f| - |f_n| \Big| \leq |f|$ から左辺中身の積分が何に収束するか?$|f_n - f| = (|f_n - f| - |f_n|) + |f_n|$.

2. $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), dx)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間とする.
   $\mathbf{R}$ 上の関数 f に対し, supp $f = \overline{\{x \in \mathbf{R}; f(x) \neq 0\}}$ で f の**台 (support)** を表す. 有界な台 (従って compact な台) をもつ連続関数の全体を $C_c = C_c(\mathbf{R})$ で表し, さらに $C_c^\infty = C_c \cap C^\infty$ で compact な台をもつ無限回連続的微分可能な関数の全体を表す.

   (a) C_c^∞ の元は何回微分しても, 再び C_c^∞ の元で, しかもすべての $1 \leq p \leq \infty$ に対し, L^p の元でもあることを簡単に説明せよ.
   (ヒント)　まず $f \in C_c^\infty$ に対し, supp f と supp f' の関係は?　後半は $C_c \subset L^p$ を説明すれば十分.

   (b) $\mathbf{R}$ 上の有界連続関数 f と $g \in C_c^\infty$ に対して,
   $$h(x) \equiv f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y) g(x-y) dy$$
   とおくと $h \in C^\infty$ で, その n 階導関数が
   $$h^{(n)}(x) = f * g^{(n)}(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y) g^{(n)}(x-y) dy$$
   で与えられることを示せ.　　**(ヒント)**　$n = 1$ で示せば十分.

3. $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), dx)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間とする.
   $f \in L^1, g \in L^2 \Rightarrow \|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$　を示せ.
   (ヒント)　$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{1/2} \cdot |f(x-y)|^{1/2}|g(y)|$ とみて Hölder, そして Fubini.
   または Fubini を用いてから, Hölder で $\displaystyle\int |g(y-x)g(z-x)| dx \leq \|g\|_2^2$ を示す.)

4. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ において μ を有限測度とする, 即ち, $\mu(X) < \infty$. このとき $1 \leq p < q \leq \infty$ なら $\|f\|_p \leq \|f\|_q \mu(X)^{1/p - 1/q}$, i.e, $\displaystyle\|f\|_p^p = \int |f|^p d\mu \leq \left(\int |f|^q d\mu \right)^{p/q} \mu(X)^{1-p/q}$ を示せ.
   (これより μ が有限のとき $1 \leq p < q \leq \infty$ なら $L^p \subset L^q$ が従う. もちろん μ が無限のときは一般には成り立たない.)
   (ヒント)　$p' = q/p (> 1), q'; 1/p' + 1/q' = 1$ として Hölder を用いる.