ピタゴラス数と合同数

(東京理科大学オープンキャンパス模擬講義)

後藤　丈志

(理工学部数学科助手)

平成17**年**8**月**5**日**　(12:00 - 12:45)

話の概要

ピタゴラス数とは？

ピタゴラス数の性質

合同数とは？

曲線との関連

未解決問題

未解決問題

- 数学には数多くの未解決問題がある。
- その中でも重要と思われる7つの問題について、**クレイ数学研究所**は100万ドル（！）の懸賞金をかけている。

  （→　８５ へぇ　だったらしい）

- それらは、非専門家にとっては問題の意味を理解するだけでも難しい。

クレイ数学研究所7つの問題

- バーチ・スウィナートンダイヤー予想
  (BSD予想)
- ホッジ予想
- ナビエ・ストークス方程式
- P≠NP 問題
- ポアンカレ予想
- リーマン予想
- ヤン・ミルズ方程式

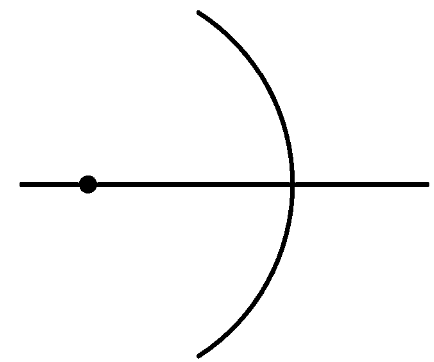
直角を測る

- 古代エジプトでは測量術が発達
  （理由： ナイル川の氾濫→区画整理）
- ピラミッドは非常に精巧に作られている
- 基本テクニック
  原始的な道具 （ロープや杭） だけを用いて
  直角を測るにはどうしたらよいか？

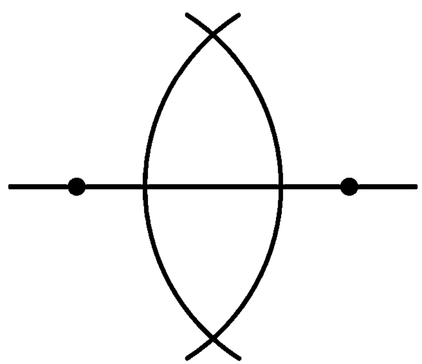
直角の測り方 (その1)

(1)

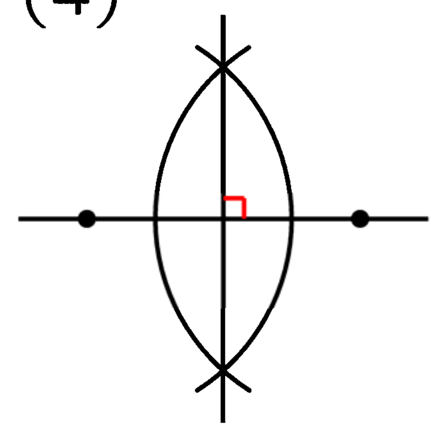
(2)



(3)

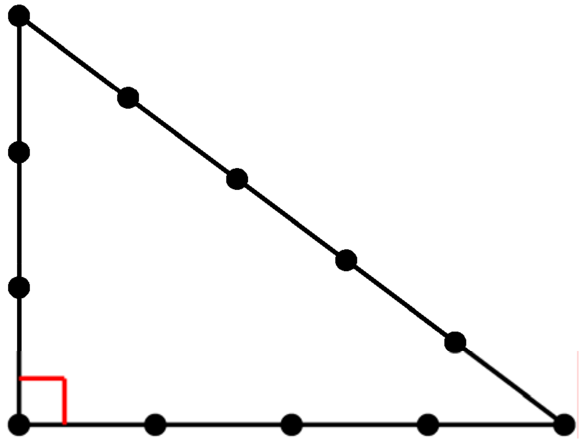


(4)



直角の測り方 (その2)

１２等分したロープを使って、次のような図形を作る。



ピタゴラスの定理

ピタゴラスの定理 (三平方の定理)

直角三角形の長さ（の組）を (a, b, c) とすると、$a^2 + b^2 = c^2$ である。

ピタゴラスの定理の逆

$a^2 + b^2 = c^2$ とすると、
三角形 (a, b, c) は直角三角形である。

例： $3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$

ピタゴラス数の定義

$a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数の組 (a,b,c) で、最大公約数が 1 であるものを、ピタゴラス数と呼ぶ。

- **ピタゴラス数の例**： $(3,4,5)$, $(5,12,13)$
- **次の例はピタゴラス数ではないので注意**

$$(1,1,\sqrt{2}),\ (6,8,10)$$

- **しばらく** $a<b$ **と思うことにする。**

素朴な疑問

- (3,4,5) より「簡単」なピタゴラス数はないか？
  → もしあれば、もっと簡単に直角が作れる。
- (3,4,5) や (5,12,13) の他にピタゴラス数はあるのか？
- あるとしたら無数にあるのか？
- 有限しかないなら、全て知りたい。無限にあるならそれらを次々に見付けるための方法、もしくは公式を知りたい。

a=2 なる解

$a^2 + b^2 = c^2$ に $a = 2$ を代入して移項

$$c^2 - b^2 = 4$$

$$\therefore\ (c+b)(c-b) = 4$$

$c+b$ と $c-b$ は共に自然数で

$c+b > c-b$ なので

$$c+b = 4,\ c-b = 1$$

これを解いて、$b = \frac{3}{2},\ c = \frac{5}{2}$

よって、$a = 2$ なるピタゴラス数

(a, b, c) は存在しない。

a=7 なる解

$a^2+b^2=c^2$ に $a=7$ を代入して移項

$$c^2-b^2=49$$
$$(c+b)(c-b)=49$$
$$c+b=49,\ c-b=1$$
$$b=24,\ c=25$$

新しいピタゴラス数 $(7,24,25)$ が見つかった。

この方法でピタゴラス数を探すことができ、無数にあることも分かる。

ピタゴラス数の例

この方法で探していくと…

$(3,4,5)$	$(15,112,113)$
$(5,12,13)$	$(16,63,65)$
$(7,24,25)$	$(17,144,145)$
$(8,15,17)$	$(19,180,181)$
$(9,40,41)$	$(20,21,29)$
$(11,60,61)$	$(20,99,101)$
$(12,35,37)$	$(21,220,221)$
$(13,84,85)$	$(23,264,265)$

何か気付くことはありませんか？

合同数の定義

次のような直角三角形 (a, b, c)
が存在するとき、n を合同数という。

- a, b, c は全て有理数
- 面積は n

例：$(3,4,5) \rightarrow 6$ は合同数
$(5,12,13) \rightarrow 30$ も合同数

合同数の例 (1)

- **5 は合同数だろうか？**

$(9, 40, 41)$ の面積は $180 = 6^2 \cdot 5$

$\left(\frac{9}{6}, \frac{40}{6}, \frac{41}{6}\right)$ の面積は 5

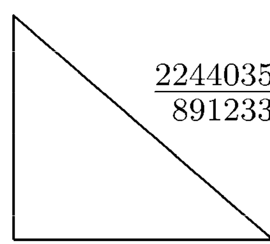
よって、5 は合同数である。

- **1,2,3,4 は合同数でないことが分かっている。**

合同数の例 (2)

現在の所、与えられた自然数が合同数かどうか必ず判定できる方法は知られていない。

面積 157 の最も簡単な直角三角形



単位円との対応 (1)

(a, b, c) をピタゴラス数とすると,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

よって、$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ は、単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の有理点である。

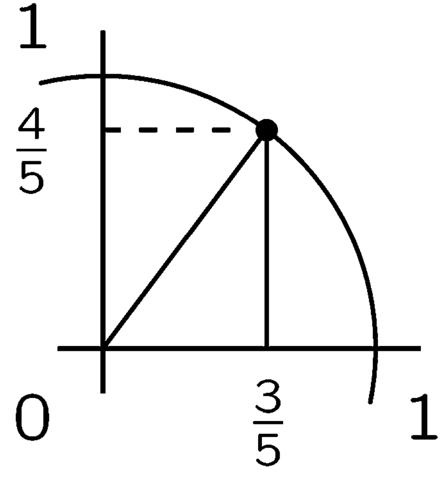
(有理点 : 座標が全て有理数である点)

単位円との対応（2）

ピタゴラス数
(a, b, c)

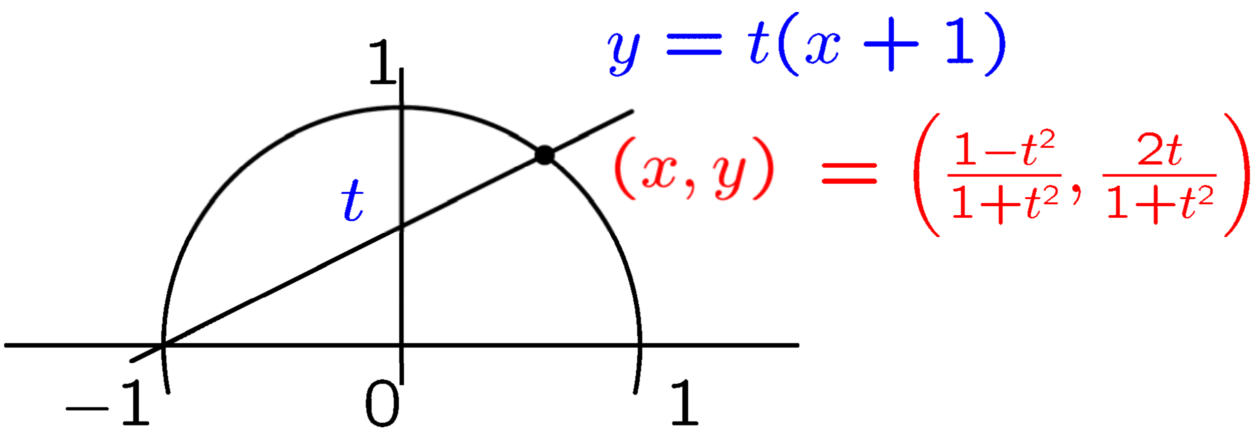
単位円上の有理点
(x, y)

例：$(3, 4, 5) \longleftrightarrow \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$



単位円上の有理点

(x, y) を単位円上第一象限の有理点とする。



$$t = \frac{y}{x+1}$$ とおくと、

$$(x, y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

ピタゴラス数の公式

$t = \frac{y}{x+1}$ は正の有理数だから、

$t = \frac{n}{m}$ と既約分数に表すと、

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = \left(\frac{m^2-n^2}{m^2-n^2}, \frac{2mn}{m^2-n^2}\right)$$

よって、全てのピタゴラス数は

次の公式で与えられる。

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

公式の適用例

公式 $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$

- $m = 2, n = 1 \quad \rightarrow \quad (3, 4, 5)$
- $m = 3, n = 2 \quad \rightarrow \quad (5, 12, 13)$
- $m = 4, n = 1 \quad \rightarrow \quad (15, 8, 17)$
- $m = 4, n = 3 \quad \rightarrow \quad (7, 24, 25)$

2次曲線上の有理点 (1)

- 復習：$x^2 + y^2 = 1$ 上の有理点は無数にあり、$(-1, 0)$ を基点として考えることにより、全て記述できた。
- $x^2 + y^2 = 2$ の有理点も無数にある。
- しかし $x^2 + y^2 = 3$ 上に有理点は一つも無い !!

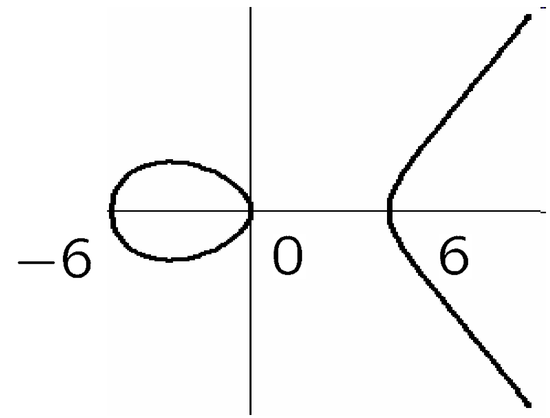
2次曲線上の有理点（2）

一般に、2次曲線は有理点を一つも持たないか、無数に持つかのどちらかである。

ハッセ・ミンコフスキーの定理により、どちらかであるかは判定可能。

ある3次曲線

$$y^2 = x(x+6)(x-6)$$



面積6の直角三角形 ⟺ **この曲線上の（ある種の）有理点**

例：$(3,4,5) \longleftrightarrow \left(\frac{25}{4}, \frac{35}{8}\right)$

3次曲線との対応

$$E_n : y^2 = x(x+n)(x-n)$$

面積 n の 直角三角形	$\Longleftrightarrow$	この曲線上の （ある種の）有理点

例： $n = 5$

$$\left(\frac{9}{6}, \frac{40}{6}, \frac{41}{6}\right) \longleftrightarrow \left(\frac{1681}{144}, \frac{62279}{1728}\right)$$

3次曲線上の有理点

E_6 は無数に有理点を持つ。

⇕

面積 6 の直角三角形が（無数に）ある。

E_1 の有理点は有限個。

⇕

面積 1 の直角三角形はない。

BSD 予想

問題：与えられた3次曲線の有理点の「個数」を知ることがいつでもできるか？
→今のところできない。

予想：その「個数」は、「2次のゼータ」と呼ばれる数学的対象の性質より分かるのではないか？