二次曲面の形状

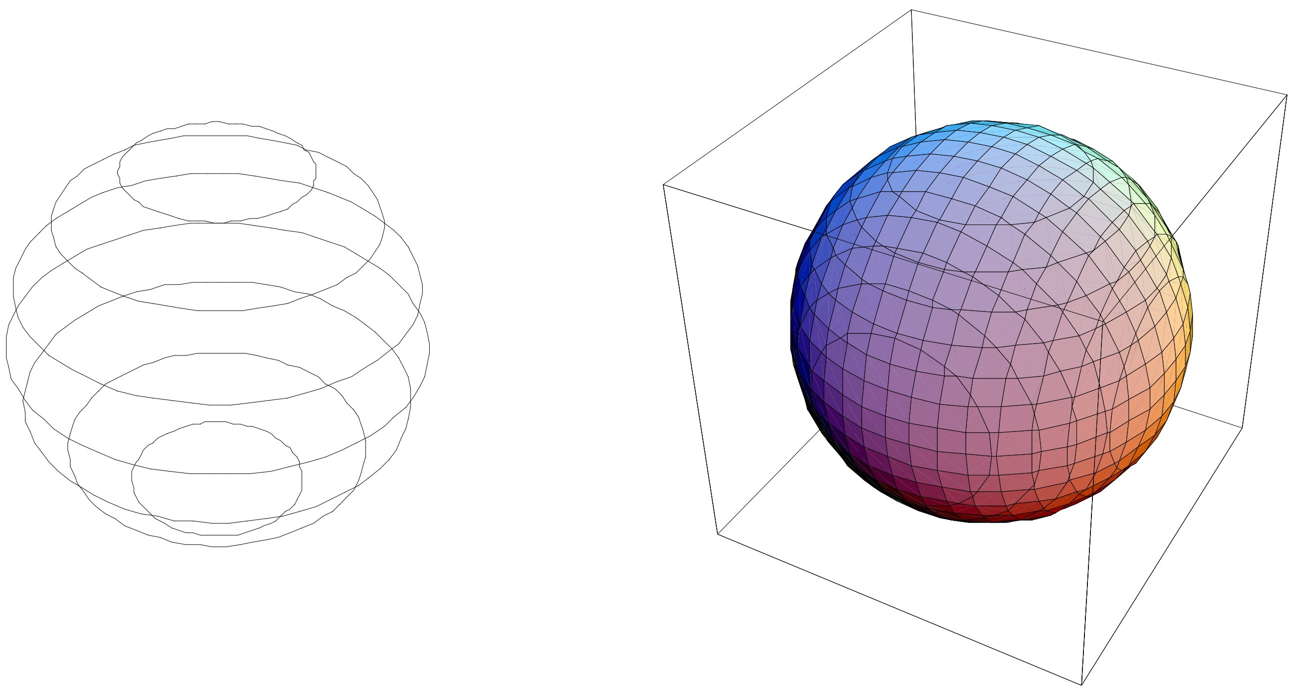
線形代数学 II 講義資料
平成19年10月31日

後藤 丈志
http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/tg/

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

原点からの距離が 1 である点の集合 ⇒ 単位球面

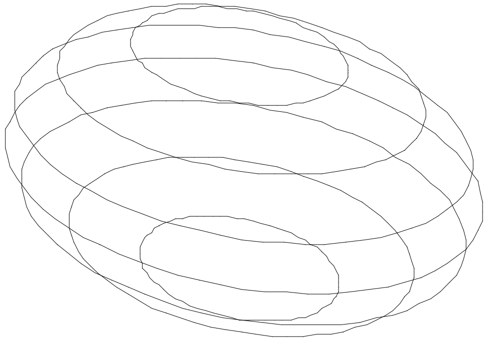
$x^2 + y^2 = 1 - z^2$ と考えると…

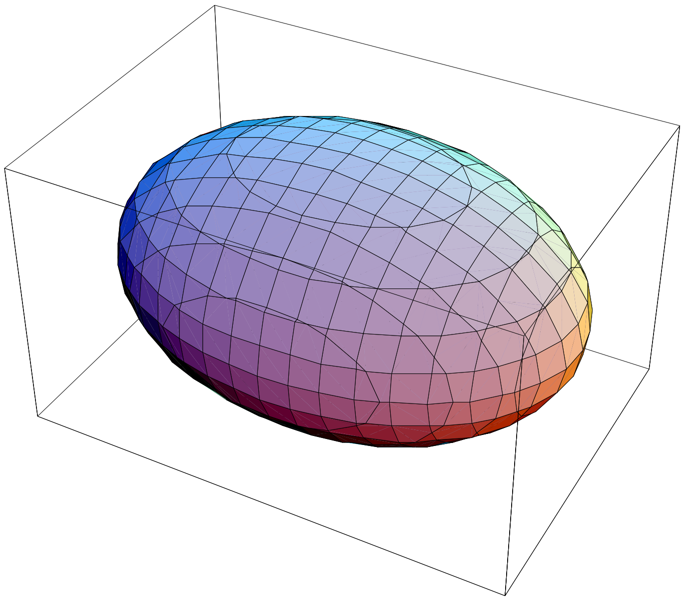


$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

球面がつぶれた形 → 楕円球面

$x^2 + 2y^2 = 1 - 3z^2$ なので z を固定すると楕円

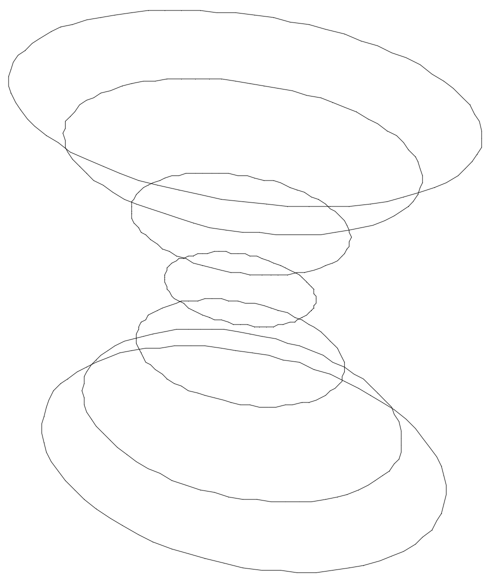


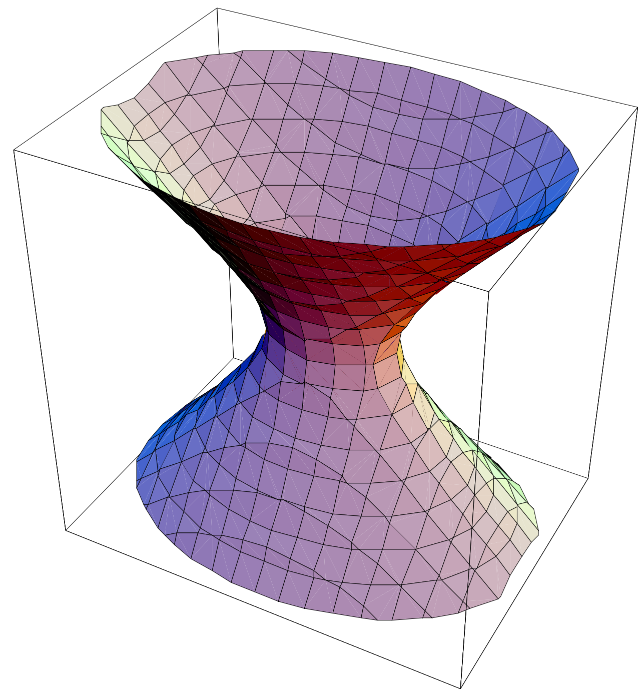


$$|x| \leq 1, \ |y| \leq 1/\sqrt{2}, \ |z| \leq 1/\sqrt{3}$$

$x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$　一葉双曲面

$x^2 + 2y^2 = 1 + z^2$ なので z を固定すると楕円

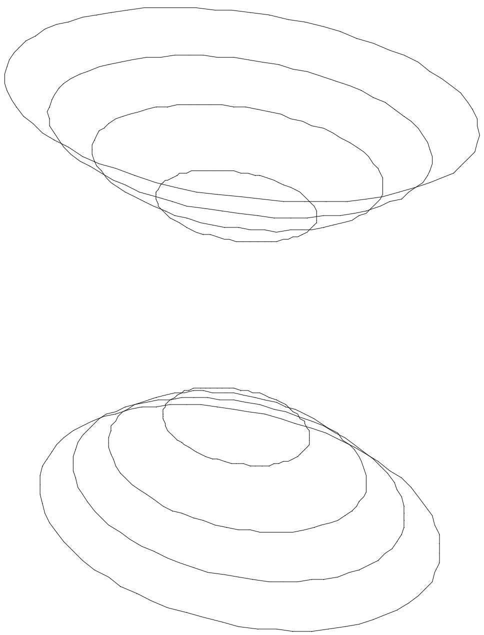


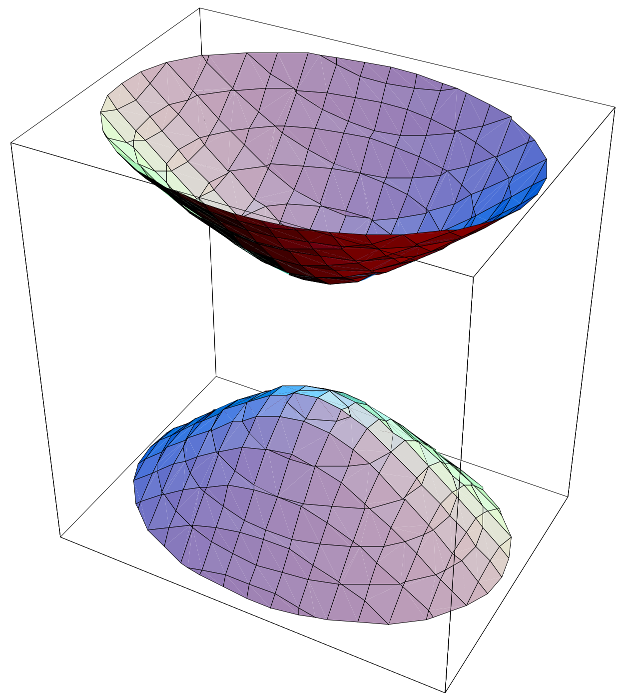


$2y^2 - z^2 = 1 - x^2$ なので x を固定すると双曲線

$x^2 + 2y^2 - z^2 = -1$ 二葉双曲面

$z = \pm 1$ のとき一点、$|z| > 1$ のとき楕円



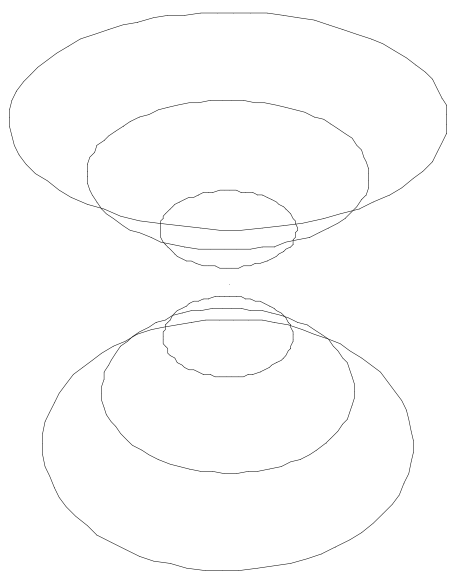


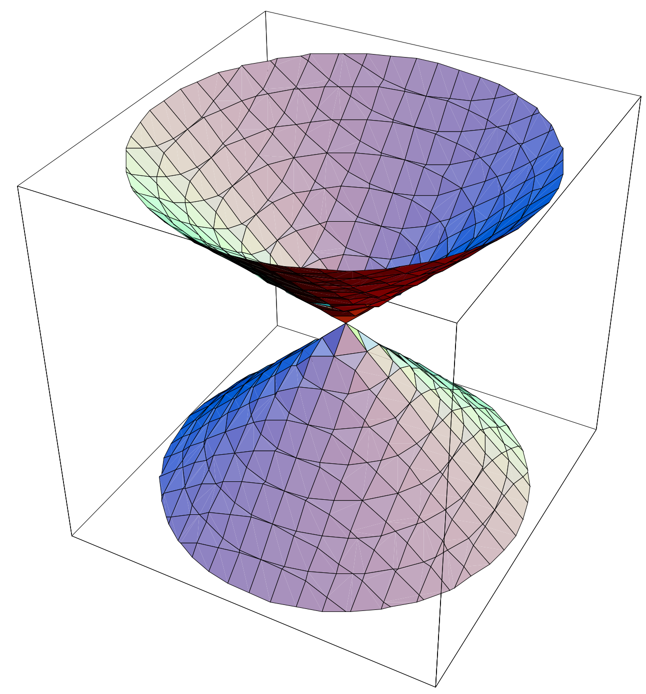
$2y^2 - z^2 = -1 - x^2$ なので x を固定すると双曲線

式の別表現 $z^2 - x^2 - 2y^2 = 1$

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$　　円錐面

z を固定すると $z = 0$ のときー点
その他のとき円

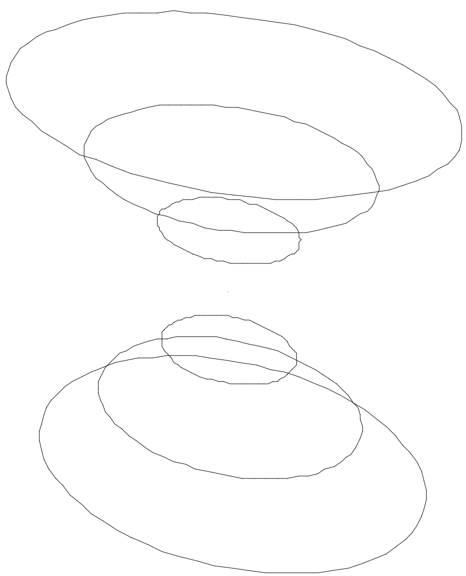
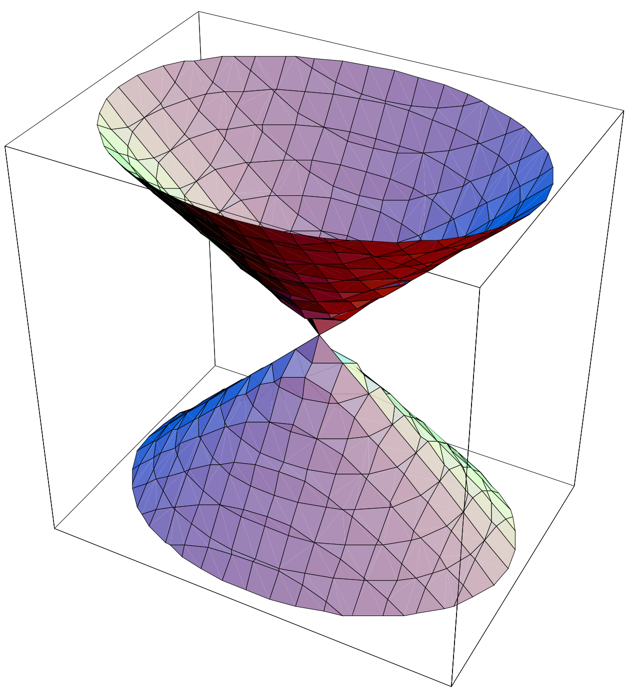




$x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ 楕円錐面

z を固定すると $z = 0$ のとき一点

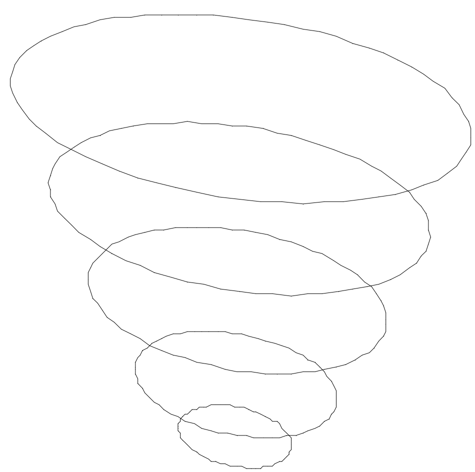
その他のとき楕円

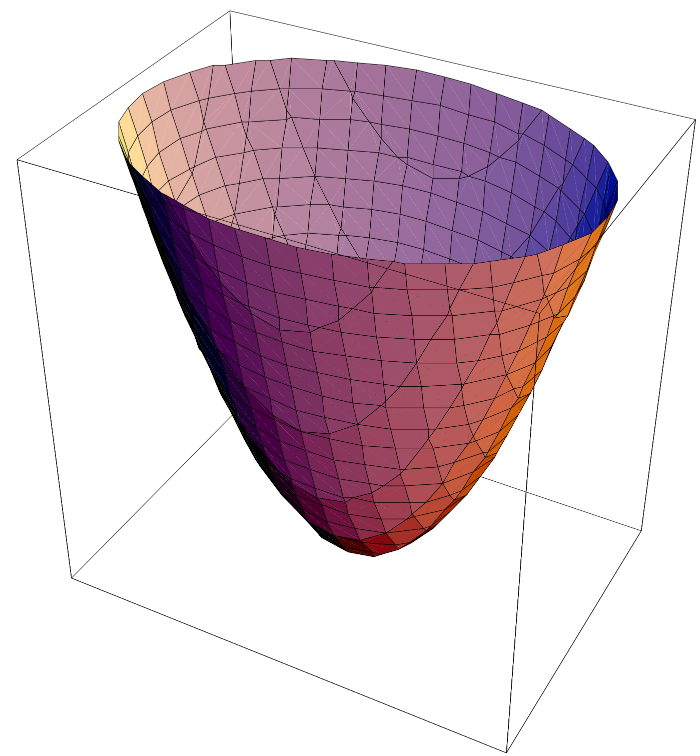



$x^2 + 2y^2 - z = 0$　楕円的放物面

z を固定すると $z = 0$ のとき一点

$z > 0$ のとき楕円

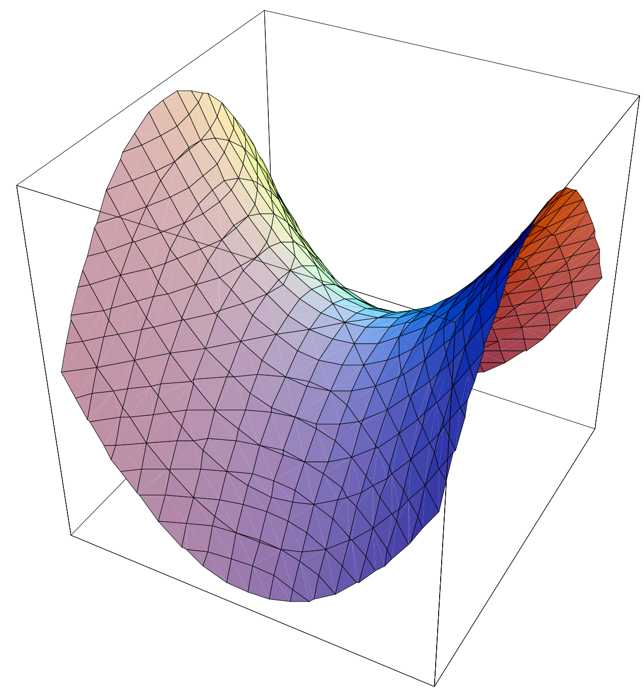




$z = 2y^2 + (x^2)$ なので x を固定すると放物線

$x^2 - y^2 - z = 0$　双曲的放物面

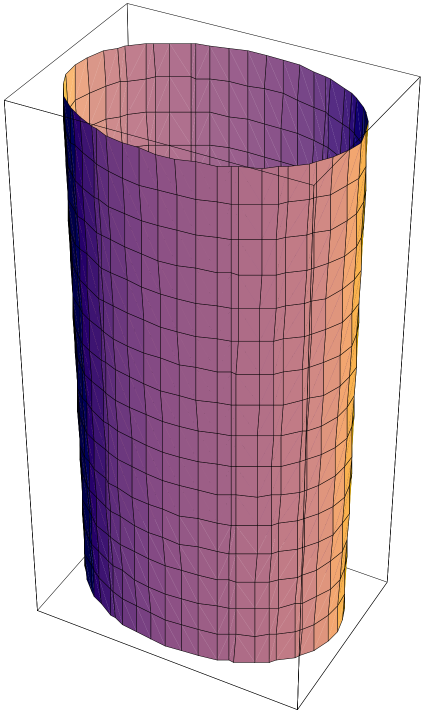
$z = -y^2 + (x^2)$ なので x を固定すると放物線



$x^2 - y^2 = z$ なので z を固定すると双曲線

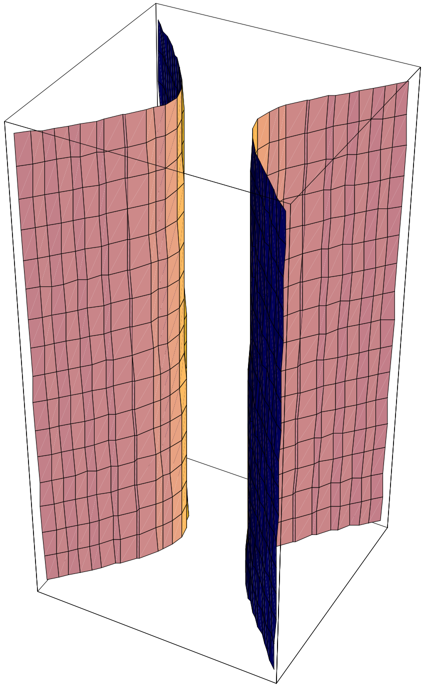
$x^2 + 2y^2 = 1$ 楕円柱面

z が何であっても同じ楕円



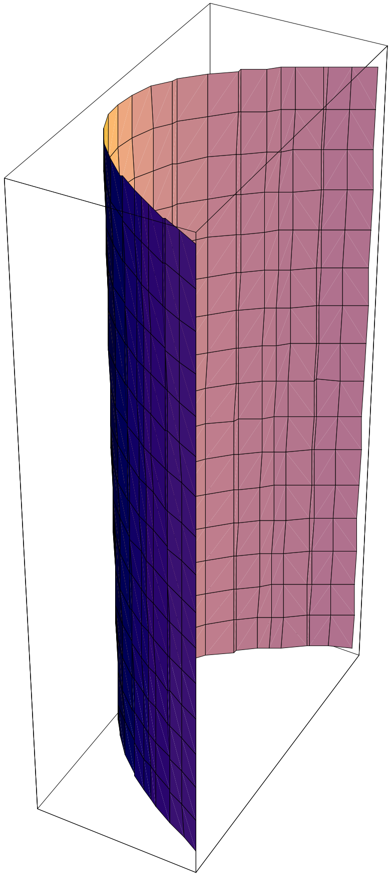
$x^2 - y^2 = 1$ 双曲柱面

z が何であっても同じ双曲線



$x - y^2 = 0$ 放物柱面

z が何であっても同じ放物線



その他退化した場合 (二次曲面とは呼ばない)

$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ のとき

- $ax^2 + by^2 + cz^2 = -1 \quad \rightarrow \quad$ 空

$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ のとき

- $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad \rightarrow \quad$ 一点
- $ax^2 + by^2 = 0 \quad \rightarrow \quad$ 直線
- $ax^2 = 0 \quad \rightarrow \quad$ 平面
- $ax^2 = 1 \quad \rightarrow \quad$ 平行二平面
- $ax^2 - by^2 = 0 \quad \rightarrow \quad$ 交わる二平面