(1)

(2)

グラフィックス

平面図形

■ $y = \sin x + \sin 2x$ のグラフを $2\pi \le x \le 2\pi$ の範囲で描いてみよう.最後のセミコロンは無駄に出力をさせない ためである.

Plot[Sin[x] + Sin[2x], {x, -2Pi, 2Pi}];

練習問題1

 $y = \sin(x^2)$ のグラフを $-5 \le x \le 5$ の範囲でプロットしてみよ.

2つ以上のグラフを同時に描くこともできる.

Plot[{x, Sin[x]}, {x, -Pi, Pi}];

これでは重なっていてどちらがどちらのグラフかよく分からないので,線の太さを変えてみる.Thickness[0.01] は図の幅の1%の太さを表す.デフォルトはThickness[0,004]である.この命令におけるPlotStyleの 様なものをオプションという.グラフィックを描く関数には様々なオプションがあるが,いくつかはこれから少 しずつ紹介する.

 $Plot[{x, Sin[x]}, {x, -Pi, Pi}, PlotStyle \rightarrow {Thickness[0.004], Thickness[0.01]}];$ (3)

(ヒント) 矢印()は - > の 2 つの記号をタイプすることによって入力する.また,この辺り,似た入力が続くので,コピーアンドペースト」や「直前の入力をコピー」を利用すること.

練習問題2

 $y = \sin(x^2)$ と $y = \cos(x^2)$ のグラフを $-3 \le x \le 3$ の範囲で同時にプロットしてみよ.その際,どちらがどちらの グラフか分かるように,線の太さを適当に設定せよ.

■ 今までの例から分かるように, 関数 Plot は y = … と陽的に表されたグラフしか描くことができない. 例えば, 単位円 (x² + y² = 1) はどのように描けばよいだろうか. 一つの方法は円を上下に分けて描くことである.

Plot[{Sqrt[1-x^2], -Sqrt[1-x^2]}, {x, -1, 1}];

(4)

つぶれて楕円に見えるのが気になるだろう.それは,デフォルトでは縦横比が黄金比になっているからである. 次のようにオプション AspectRatio で比を指定することによって真の形を描くことができる.コマンド Show を用いれば,もう一度同じ命令を描く手間が省ける.ただし,Show で用いることのできるオプションには制限 があり,例えば先の PlotStyle は使えないので注意が必要である.

(5)

(6)

(7)

Show[%, AspectRatio → Automatic];

円を描くもう一つの方法は,関数 ImplicitPlot を用いることである.ただし,これは標準では用意されていないので,パッケージを読み込む必要がある.

<< Graphics `ImplicitPlot`

ImplicitPlot $[x^2 + y^2 == 1, \{x, -1, 1\}];$

媒介変数を用いて描くこともできる.

ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2Pi}];

円の媒介変数表示として,

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

もあるので,次のようにしても描ける.

ParametricPlot[{(1-t^2)/(1+t^2),2t/(1+t^2)},{t,-10,10}];

(8)

ただし, (-1,0)の周りが描けていないことが分かるだろう.その点は *t* = ∞ に対応する.*t* の範囲を広げれば 描けていない部分は小さくなるが,プロットする点がその周囲に集中しすぎて反対部分の滑らかさが失われる. よって,この方法はあまりお勧めではない.

練習問題3

楕円
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$
の真の形を Plot, ImplicitPlot, ParametricPlot の3種類を用いて描け.

空間図形

■ 関数名の末尾に 3D が付くだけで,空間図形も同じように描くことができる.次で曲面 *z* = *x*³ + *y*³ - 3*x* - 12*y* + 20 が描ける.(*x*, *y*) = (-1, -2) で極大, (1, 2) で極小, (-1, 2), (1, -2) でいわゆる鞍点になっていることが観察できる だろう.

 $\label{eq:plot3D[x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}];$

(9)

(10)

どちらが, x 軸でとちらが y 軸か分かるだろうか.もし分からなければ, 軸に名前を付ければはっきりする.

 $\texttt{Show}[\texttt{%,AxesLabel} \rightarrow \{\texttt{"x", "y", "z"}\}];$

本題から少しずれるが、次のようにすると式に値を代入することができ、この場合の極大値と極小値を求めるこ

とができる.

 $x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20//. \{x \rightarrow -1, y \rightarrow -2\}$

 $x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20//. \{x \rightarrow 1, y \rightarrow 2\}$

(11)

練習問題4

 $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ のグラフを $-1 \le x, y \le 1$ の範囲でプロットせよ.

■ 単位球を描いてみよう.Plot3D は Plot と違い,同時に2つ以上の図形を扱うことができないので,上下 に分けて描く方法は使えない.平面図形のときと同様に,陰関数表示でも描くことはできるが,また別のパッ ケージをロードしなければならない.



■ ParametricPlot3D で空間内の曲線も描くことができる.

■ トーラス (ドーナツ状の立体) である.

```
ParametricPlot3D[
  {Cos[t](3/2 + Cos[u]), Sin[t](3/2 + Cos[u]), Sin[u]},
  {t, 0, 2Pi}, {u, 0, 2Pi}];
```

(15)

これでは穴が開いているかどうか分からないので,オプション ViewPoint を指定して視点を変える.

Show[%, ViewPoint \rightarrow {0, 0, 2}];

(16)

ちなみに, ViewPoint は指定しなければデフォルトは {1.3, -2.4, 2} である.他に重要なオプションとして Plot-Points がある.この数値を上げればプロットする点が増えて滑らかな図形が得られるが,描くのに時間がかか るようになる.デフォルトは 25 である.

アニメーション

■ 次を実行すると, n = 0, …, 9 の 10 枚のグラフィックが得られる.見れば分かると思うが, サインカーブを x 軸方向に少しずつ平行移動したものである.

Table[Plot[Sin[x-nPi/5], {x, -3Pi, 3Pi}], {n, 0, 9}];

(17)

(18)

ここで一番上のグラフをダブルクリックすると動き出す(10コマしかないのであまり滑らかとはいえないが).立体図形のアニメーションも同様に作成することができる.

練習問題5

何か立体図形のアニメーションを作成してみよ、例えば、回転する螺旋など、

二次曲面

■ 二次曲線は楕円, 放物線, 双曲線の3種類あることは高校で習っただろう.大学の線形代数では, 一般の二 変数二次方程式 *ax²* + *bxy* + *cy²* + *dx* + *ey* + *f* = 0 が表すグラフを, 回転と平行移動によって標準形に直す方法を 学ぶ.その結果, 空集合や直線などに退化していなければ, 上の3種類のうちいずれかであることが判明する. 同様に, 三変数二次方程式は空集合や平面などに退化していなければ, 標準形に直すことによって数種類に分類 された二次曲面のうちいずれかであることが判明する.それらの二次曲面を関数 ContourPlot3D を用いて描 いてみよう.簡単のため, 係数 *a*, *b*, *c*, *d* を入力すると, *ax²* + *by²* + *cz²* = *d* のグラフを表示する関数をまず定義 しておく.

conic1[a_, b_, c_, d_] := ContourPlot3D[a*x^2+b*y^2+c*z^2-d, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
conic1[1, 1, 1, 1];

練習問題 6

次のグラフを表示せよ.

- (i) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$,
- (ii) $x^2 y^2 + z^2 = 1/10$,
- (iii) $x^2 y^2 z^2 = 1/10$,
- (iv) $x^2 + y^2 z^2 = 0$,
- (v) $x^2 + y^2 = 1$,
- (vi) $x^2 y^2 = 1/10$,
- (vii) $x^2 y^2 = 0$,
- (viii) $x^2 = 1$,

退化していない二次曲面のうち,標準形が $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$ の形(係数は0も許す)であるものは次の5種類である.もちろん楕円面は球を含み,楕円錐面は円錐面を,楕円柱面は円柱面をそれぞれ含む.

楕円面,一葉双曲面,二葉双曲面,楕円錐面,楕円柱面,双曲柱面.

練習問題6で得られた図形がどれか分かるだろうか.また,その判別法は?この辺りの知識があいまいな者は線 形代数の教科書の5.5節をよく勉強すること.

■ 退化していない二次曲面のうち,標準形が *z* = *ax*² + *by*² の形 (係数は 0 も許す) であるものは次の 3 種類で ある.

楕円放物面,双曲放物面,放物柱面.

```
conic2[a_, b_] := ContourPlot3D[a * x<sup>2</sup> + b * y<sup>2</sup> - z, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```

conic2[1,1];

conic2[1, -1];

conic2[1,0];

プレゼンテーション (参考)

現在,プレゼンテーションでは Microsoft の PowerPoint がよく用いられているが,内容によっては Mathematica でも魅力的なプレゼンテーションが可能である.実際に計算をしてみせるなどすれば,説得力も増すであろう. Mathematica のノートブックには,見栄えをよくするための様々な機能が付いている.

■ まず,次の URL から example.nb をダウンロードし, Mathematica で開いてみよ.

http://jwww.ma.noda.tus.ac.jp/j-goto/math/example.nb

このファイルを自分で作ってみよう.新規にノートブックを開き,日本語で「使ってみよう」と入力する.この セルを選択し(右の青い括弧をクリックする),メニューバーの「書式」 「スタイル」 「Title」を選ぶ(ショー トカットは [Att]+1).これでタイトルらしく文字が大きくなるであろう.次に,新しく「はじめの一歩」と入力し, セルを選択して「書式」 「スタイル」 「Section」を選ぶ(または [Att]+4).タイトルほどではないが,文字が 大きくなる.また,新しく「試しに...」の文章を入力し(面倒ならコピーしてもよい),スタイルを「Text」にす る(または [Att]+7).今度は逆に文字が薄くなったであろう.最後に1+1と入力し,いつものように [Shift]+[Enter] で評価する.最後に「書式」 「スタイルシート」 「Classroom」を選ぶ.これでノートブックがカラフルに なる.いろいろなスタイルシートを試してみて気に入ったものを使えばよい.ちなみに元の形式は「Default」で ある.実際のプレゼンテーションでは,文字がもう少し大きな方がよい.そこで「書式」 「表示用スタイル 環境」 「Presentation」を選ぶと全体的に文字が大きくなる.

■ (画像の読み込み) ノートブックに画像を読み込むことができる.まず,次のファイルをホームディレクトリ にダウンロードせよ.

http://jwww.ed.noda.tus.ac.jp/j-goto/iamge/picture.jpg

それから,ノートブックで次のようにする.Import で画像を読み込むが,環境変数 \$Path に登録されている ディレクトリのみを探すため,まずは \$Path にホームディレクトリを登録する.その後,Show で画像を表示 する.Mathematica は bmp 形式の画像の他に,jpg 形式,gif 形式,png 形式等の画像も読み込める.

(19)

```
$Path = Append[$Path, "Z : "];
pic = Import["picture.jpg"];
Show[pic];
(20)
```

■ (HTML 形式で保存) Mathematica ファイルをホームページで公開したくなったとする.見る人が Mathematica を持っていれば問題はないが,普通は持っていないだろう.そういう時は,ノートブックを HTML 形式で保存 して公開すればよい.それには,メニューバーから「ファイル」 「特別な形式で保存」 「HTML」とすれば よい.できた HTML ファイルは任意のブラウザで開くことができる.

課題

■ 今日できたファイルを math3.nb と名前をつけてセーブせよ。

注意.ファイルのサイズを確認し,5MBを超えている場合は,適当にいらないものを削除するなどして5MB 以下になるようにせよ.5MB以上のファイルを送りつけたものは,メール爆弾と認定して大幅に減点する. 次にメーラーを起動し,次を記入せよ.

●練習問題6の各曲面の名称を答えよ.

●今日の内容について何か感想を述べよ(一言でもよい).

■ メールの Subject は「学籍番号+math3」とせよ.例えば,学籍番号が 6101999 ならば, 6101999+math3 となる.署名を付け, math3.nb を添付し,今日中に j-goto に送ること.