線形代数 I 演習　第 1 回

1-1 組担当 (446 教室)　　牛島
1-2 組担当 (443 教室)　　高橋

以下の問題を解き黒板で発表しなさい。

1.1　2 点 P, Q の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ とするとき、線分 P, Q の中点の位置ベクトルは $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ であることを示せ。

1.2　3 点 P, Q, R の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ とするとき、三角形 PQR の重心の位置ベクトルは $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$ であることを示せ。

1.3　ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ との交角が $\frac{\pi}{6}$、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ との交角が $\frac{\pi}{4}$ であるような長さ 1 のベクトルを求めよ。

1.4　三点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ。

1.5　次の 3 つのベクトルは線形独立か。

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

1.6　次の方程式の表わす直線のベクトル表示を求めよ。

1) $2x + 3y = 4,$

2) $x = 3.$

1.7　次の直線を表わす方程式を求めよ。

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$　　2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

1.8　二個の一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1, \\ 3x + 2y + z &= -1. \end{cases}$$

の表わす直線のベクトル表示を求めよ。

1.9　直線 (l) 上の二点 P_1, P_2 の位置ベクトルを $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ とするとき、線分 P_1P_2 上の位置ベクトルは、

$$t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

の形に表わされることを示せ。

1.10　方程式 $2x - y + 3z = 1$ の表わす平面のベクトル表示を求めよ。

1.11　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の表わす平面の方程式を求めよ。

1.12　三点 P_1, P_2, P_3 の位置ベクトルを $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ とするとき、三角形 $P_1P_2P_3$ の周及び内部の点の位置ベクトルは、

$$t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + t_3\mathbf{x}_3, \quad (t_1, t_2, t_3 \geq 0, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1)$$

の形に表わされることを示せ。

1.13　二つの平面

(S_1)　$$x + 2y + 2z = 3,$$

(S_2)　$$3x + 3y = 1$$

の交角を求めよ。

1.14　任意の二つの平面に対し、その両方と直交する平面が存在することを示せ。

1.15　平面内のすべての点を原点に関する対称点に移す変換が、ベクトルの線形変換を引起こすことを示し、対応する行列を求めよ。

1.16　A, B は 2×2 行列、T_A は A の引起こす V^2 上の線形変換とする。T_A と T_B の合成変換 T_BT_A は T_{BA} に等しいことを示せ。

1.17　直交座標系に関して $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a^2 + b^2 = 1$ とするとき、$\mathbf{a}$ の射影子 T の行列を求めよ。

1.18　$\mathbf{o}$ でない V^2 のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が直交するとき、$\mathbf{a}$ への射影子 T および $\mathbf{b}$ への射影子 S に関して次のことを証明せよ。

1. $T^2 = T, \quad S^2 = S$,
2. $TS = ST = O \quad$ (O はすべてのベクトルを $\mathbf{o}$ に移す変換),
3. 任意の $\mathbf{x}$ に対し、$T\mathbf{x} + S\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

1.19　次の行列によって引起こされる空間の変換の幾何学的意味を説明せよ。

1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.20　直交座標系に関して $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, a^2 + b^2 + c^2 = 1$ であるとき、V^3 の $\mathbf{a}$ への射影子 T の行列を求めよ。

1.21　$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ をたがいに直交する $\mathbf{o}$ でない V^3 のベクトルとする。$\mathbf{a}$ への射影子を T とし、$\mathbf{b}, \mathbf{c}$ の張る平面への射影子を S とするとき、次のことを示せ。

1. $T^2 = T, \quad S^2 = S$,
2. $TS = ST = O \quad$ (O はすべてのベクトルを $\mathbf{o}$ に移す変換),
3. 任意の $\mathbf{x}$ に対し、$T\mathbf{x} + S\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

1.22　次のベクトル積を計算せよ。

1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.