線形代数 I 演習　第 11 回

1-1 組担当 (446 教室)　　牛島
1-2 組担当 (443 教室)　　高橋

11.1　次の主張を示しなさい。

1) $A \in M(m,n;\mathbb{R})$ について、${}^tAA = O$ ならば、$A = O$ である。

2) $A \in M(n,n;K)$ が正則 $\underset{\mathrm{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{rank}A = n$。

3) $A = (a_{ij}) \in M(n,n;K)$ について、

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1,\cdots,n)$$

が成り立つならば、A は正則行列である。

11.2　$A \in M(m,n;K), \mathbf{b} \in K^m$ とする。一次方程式系 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ について考える。基本変形の繰り返しにより、$\tilde{A} := (A\mathbf{b}) \sim \begin{pmatrix} E_r & * & \mathbf{d} \\ O & O & \mathbf{d}' \end{pmatrix}$ と変形できたとする。ここに、$r := \mathrm{rank}A$, $\mathbf{d} := {}^t(d_1,\cdots,d_r) \in K^r, \mathbf{d}' := {}^t(d_{r+1},\cdots,d_n) \in K^{m-r}$ とおいた。次の各主張を示しなさい。

1) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つ $\underset{\mathrm{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbf{d}' = 0$。

2) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つ $\underset{\mathrm{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ \tilde{A}$。

3) $m = n$ かつ A:正則　$\Rightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はちょうど一つの解を持つ。