

線形代数Ⅰ演習 第16回

1-1 組担当 (446 教室) 高緑

1-2 組担当 (443 教室) 牛島

16.0 以下の問に答えなさい。

- 1) 集合 X 上で定義された二項関係 $\sim$ が同値関係であるとはどういうことか説明しなさい。
- 2) 集合 X とその上で定義された同値関係 $\sim$ が与えられているとき、 X の $\sim$ による商集合 $X/\sim$ とは何か説明しなさい。
- 3) 集合 X が線形空間であるとはどういうことか説明しなさい。

16.1 以下の関係 $\sim$ が同値関係であることを示しなさい。

- 1) A, B を行列とする。 $A \sim B$ とは有限回の基本変形によって A が B に変形されること。
- 2) p を正の整数とする。整数 a, b に対して、 $a \sim b$ とは a を p で割った余りと b を p で割った余りが等しいこと。
- 3) A, B を集合とする。 $A \sim B$ とは A から B への全単射が存在すること。

16.2 以下の集合はどのようなものか説明しなさい。

- 1) (m, n) 型行列全体のなす集合 $M_{m,n}$ を 16.1 の 1) の同値関係 $\sim$ で割った商集合。
- 2) 整数全体の集合 Z を 16.1 の 2) の同値関係 $\sim$ で割った商集合。特に $p = 5$ のとき、各同値類の代表元を書きなさい。

16.3 以下の集合 V が C 上の線形空間になることを示しなさい。

- 1) $V = M_{m,n}(C)$.
- 2) $V = C$ 係数の n 次多項式の全体のなす集合.

16.4 T を線形空間 V 上の線形変換とする。 V のある元 $a (\neq 0)$ に対して、自然数 m を $T^{m-1}a \neq 0$ かつ $T^m a = 0$ なるものとする。このとき、 m 個のベクトル $a, Ta, T^2a, \dots, T^{m-1}a$ は線形独立であることを示しなさい。