

線形代数Ⅰ演習 第18回

1-1 組担当 (446 教室) 高緑

1-2 組担当 (443 教室) 牛島

18.0 $K = \mathbb{C}$ または $K = \mathbb{R}$ とし, V, V^0 を K 上の線形空間とする. 以下の問に答えなさい.

1) V の二組の基底 E と F があるとき, 基底のとりかえ $E \rightarrow F$ の行列 P とは何か説明しなさい.

2) V と V^0 が同型であるとはどういうことか説明しなさい.

3) V が n 次元線形空間であるとき, V から K^n への同型写像が存在することを示しなさい.

18.1 以下の写像のうち, 線形のものはいくつか答えなさい.

1) $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ を固定する.

$$\mathbb{C}^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \bar{a}_i \in \mathbb{C}.$$

2) $A \in M_{kl}(K), B \in M_{mn}(K)$ を固定する.

$$M_{lm}(K) \ni X \rightarrow AXB \in M_{kn}(K).$$

3) $M_{nn}(K) \ni X \rightarrow \det(X) \in K$.

18.2 n 個の未知数に関する m 個の, K の元を係数とする斉次一次方程式系

$$Ax = 0, \quad A \in M_{mn}(K)$$

の解となる K -ベクトルの全体は K 上の線形空間になることを示しなさい. さらに, この線形空間の次元はいくつか?

18.3 K^3 の元 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ で, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ を満たすものの全体を V とする.

以下の問いに答えなさい.

1) V は 2 次元線形空間であることを示しなさい.

2) 以下の E, F が V の基底になることを示しなさい.

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

3) 基底のとりかえ $E \rightarrow F$ の行列を求めなさい.