

線形代数Ⅰ演習 第21回

1-1 組担当 (446 教室) 高緑

1-2 組担当 (443 教室) 牛島

21.0 $K = \mathbb{C}$ または $K = \mathbb{R}$ とし, V, V' を K 上の線形空間とする. 以下の問に答えなさい.

1) $T: V \rightarrow V'$ を線形写像, $(E; \varphi)$ を V の基底, $(E'; \varphi')$ を V' の基底とすると, $(E; \varphi), (E'; \varphi')$ に関する T の行列 (表現行列ということもある) とは何か説明しなさい.

2) $T: V \rightarrow V'$ を線形写像の階数とは何か説明しなさい.

21.1 $P_n(K)$ を K 係数の n 次以下の多項式全体のなす線形空間とする. このとき, 以下の問に答えなさい.

1) $b \in K$ を任意に固定する. $P_n(K)$ から $P_n(K)$ への写像 T_b を

$$(T_b f)(x) = f(x + b), \quad f \in P_n(K)$$

によって定義すると, T_b は線形変換であることを示しなさい.

2) $E = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$ は $P_n(K)$ の基底であることを示しなさい.

3) $n = 2$ のとき, 線形変換 $T_b: P_2(K) \rightarrow P_2(K)$ の基底 $E = E' = \langle 1, x, x^2 \rangle$ (定義域, 値域ともに同じ基底 $\langle 1, x, x^2 \rangle$ をとるということ) に関する行列を求めなさい.

21.2 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ とする. 漸化式

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + a_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす実数列 $\{x_n\}$ の全体のなす集合を V と書くことにする. このとき以下の問に答えなさい.

1) V は実線形空間であることを示しなさい.

2) $0 \leq i \leq k-1$ に対して, V の元 e_i を, 最初の k 項が $x_i = 1, x_j = 0 (0 \leq j \leq k-1, j \neq i)$ なる実数列と定める. k 個の実数列 $E = \{e_0, e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$ は V の基底であることを示しなさい.

3) V から V への写像 T を

$$T: \{x_n\} \rightarrow \{x_{n+1}\}$$

によって定めると, T は線形変換であることを示しなさい.

4) 3) の T の 2) の基底に関する行列を求めなさい.