

線形代数Ⅰ演習 第5回

1-1 組担当 (446 教室) 牛島

1-2 組担当 (443 教室) 高橋

以下の問題を解き黒板で発表しなさい。

5.1 K^n の任意のベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に K^n の次のベクトルを対応させる写像は K^n の線形変換である。対応する n 次 K 行列を求めよ。

$$1) \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} a_1 x_1 \\ a_2 x_2 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{pmatrix} \quad (a_i \in K), \quad 3) \begin{pmatrix} a x_1 + x_2 \\ a x_2 + x_3 \\ \vdots \\ a x_{n-1} + x_n \\ a x_n \end{pmatrix} \quad (a \in K)$$

5.2 次の問に答えなさい。

1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ を対応させる写像は K^n から K への線形写像である。対応する行列を求めよ。

2) $m \leq n$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ を対応させる写像は K^n から K^m への線形写像である。対応する行列を求めよ。

3) K の元 x にベクトル $\begin{pmatrix} a_1 x \\ a_2 x \\ \vdots \\ a_n x \end{pmatrix}$ ($a_i \in K$) を対応させる写像は K から K^n への線形写像である。対応する行列を求めよ。

5.3 空間 V^3 において、次の各線形変換の行列を求めよ。ただし、 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\|\mathbf{a}\| = 1$ とする。

- 1) 直線 $\mathbf{x} = t\mathbf{a}$ に関する対称変換。
- 2) 平面 $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$ に関する対称変換。
- 3) ベクトル \mathbf{a} の周りの各 θ の回転。

5.4 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ の形の行列を上三角行列という。

1) A, B が上三角行列ならば、 $A + B, AB$ もまた上三角行列であることを示せ。

2) 上三角行列 A が正則であるためには、 $a_{ii} \neq 0$ ($1 \leq i \leq n$) となることが必要十分であることを示せ。またそのとき、 A^{-1} も上三角行列であることを示せ。