

線形代数Ⅰ演習 第7回

1-1 組担当 (446 教室) 牛島

1-2 組担当 (443 教室) 高橋

以下の問題に答え解答を提出しなさい。

時間があれば講義、演習に対する感想・要望を書きなさい。

7.0 1) n 個の未知数をもつ m 本の方程式からなる一次方程式系、

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

の係数行列 A 及び拡大係数行列 \tilde{A} を書きなさい。

2) 左基本変形と最後の列以外の列の交換によって \tilde{A} はどこまで「簡単」になるか? また、上の方程式が解を持つための必要十分条件を述べなさい。

3) 上の連立方程式が解を持つとき、解はどのような形で書けるか述べなさい。

7.1 任意の行列 A は何回かの左基本変形により階段行列に変形できることを示しなさい。階段行列とは

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & * & 0 \\ & & 1 & * & * & 0 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & * \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 1 \\ & 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

の形の行列であり、1 が現れるのは上から r 行 ($r = \text{rank}(A)$) までである。

7.2 次の一次方程式系を解きなさい。

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 - x_2 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 3, \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

8.1 次の連立一次方程式が無数の解を持つための a, b の条件、およびそのときの解を求めなさい。

$$1) \begin{cases} 3x_1 + ax_2 - x_3 &= 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + ax_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= b. \end{cases}$$