

以下において、 V 、 W 及びそれらに添字がついたもの (W_1 等) は全て、 K ($K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) 上の線形空間とする。

[1] 次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[2] 以下の問に答えよ。

(1) A, B を n 次行列とするととき $2n$ 次行列 $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ に対して以下を示せ。

$$\det(C) = \det(A + B)\det(A - B).$$

(2) 以下の行列式の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[3] W_1, W_2 を次のように定義する。

$$W_1 = \{x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0\},$$

$$W_2 = \{x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}.$$

このとき、以下の問に答えよ。

(1) $W_1, W_2 \subset \mathbb{C}^4$ は $\mathbb{C}^4$ の部分空間であることを示せ。

(2) $W_1 \cap W_2$ の次元及び基底を求めよ。

[4] $T: V \rightarrow W$ を線形写像とする。このとき、次のことを証明せよ。

(1) $T(V) = \{Tx; x \in V\}$ は W の部分空間である。

(2) $\ker T$ は V の部分空間である。

[5] $P_2(K)$ を 2 次以下の多項式の空間とし、 $P_2(K)$ の変換 $T: f(x) \rightarrow af(x+b)$ を考える。(ただし、 a, b はいずれも定数とする。)

(1) T が線形変換であることを示せ。

(2) $\{1, x, x^2\}$ が $P_2(K)$ の基底となることを示せ。

(3) 定義域でも値域でも基底として $\langle 1, x, x^2 \rangle$ を選んだときの、 T の行列を求めよ。