非可換岩澤理論について

八森 祥隆 (東京大学数理科学研究科)

1. 序

E を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線とし, p を素数とする. 有限次代数体 F 上の E の p^∞-Selmer 群 $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F)$ とは, v が F の素点全体を走るときの Galois cohomology の制限写像

$$H^1(F, E[p^\infty]) \to \prod_v H^1(F_v, E(\overline{F_v}))[p^\infty]$$

の kernel として定義される群である. ここで $*[p^\infty]$ は p 巾 torsion 元全体のなす部分群を表し, $E[p^\infty]$ は $E(\overline{F})[p^\infty]$ のこととする. これについて次の完全列が存在する:

$$0 \to E(F) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F) \to \mathrm{III}(E/F)[p^\infty] \to 0.$$

$\mathrm{III}(E/F)$ は Tate-Shafarevich 群を表す. 有名な Birch-Swinnerton-Dyer 予想が, $E(F)$ の rank と $\mathrm{III}(E/F)$ の位数を Hasse-Weil L 関数 $L(E/F, s)$ の $s=1$ での値と結びつけるものであったことを考えると, これら二つの群の情報を含む Selmer 群の重要性が分かる.

楕円曲線の岩澤理論は, この B-SD 予想に端的に表れる Selmer 群と L 関数の値の結びつきを, p 進的により精密に見るひとつの方法である. 具体的には次のように考える: $K_\infty/\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の有限個の素点のみが分岐する無限次の Galois 拡大で, $G := \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q})$ とおくとき G が compact p 進 Lie 群であるものとする. K_∞ 上の E の Selmer 群を

$$\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty) := \varinjlim_F \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F)$$

により定義する. 但し F は $K_\infty/\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$ 上有限次な中間体全体を走るものとし, 順極限は自然な制限写像によるものとする. $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)$ には G が作用する. ここではその作用を左作用としておく. $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)$ の Pontrjagin dual

$$\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

を考えると, これは compact な $\mathbb{Z}_p$ 加群となる. 更に $g \in G$ の作用を $(gf)(s) = f(g^{-1}s)$ とすることで G が左から連続に作用する. このことから $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee$ には完備群環

$$\Lambda(G) := \mathbb{Z}_p[[G]] = \varprojlim_U \mathbb{Z}_p[G/U]$$

(岩澤代数ともいう. U は G の開正規部分群全体を走る) の左作用を定めることができ, それは $\Lambda(G)$ に入る自然な位相に関し連続である.

このようなものの見方が岩澤理論の特徴の一つであるが, その中心課題は E の L 関数の $s=1$ での値を p 進的に補間した "p 進 L 関数" と, Selmer 群の $\Lambda(G)$ 上の加群としての構造を反映する何らかの不変量とを結びつけるいわゆる岩澤主予想である.

この岩澤主予想の定式化と証明への前進については, G が可換な群 ($G \cong \mathbb{Z}_p$ など) となる K_∞ の場合に大きな成功をおさめた. この場合 $\Lambda(G)$ は可換環となり, その上の加群の構造定理が主予想を定式化する上で大事な役割を担ったのである.

この成功を見れば, G がより一般の非可換な p 進 Lie 群の場合にも同様のことが成り立つことを期待することは, ある意味自然なことかも知れない. これが本稿で紹介しようとする非可換岩澤理論である. しかし安易に可換の場合の類似をたどろうとすると, たちまち様々な困難に出くわすのである. これは $\Lambda(G)$ が非可換環であるとき, その上の加群に起きる現象が可換環上のそれと大きく異なる場合があることによる.

そこで本稿ではまず可換の場合の岩澤理論と岩澤主予想の定式化を復習する. 次に非可換岩澤理論で類似をたどったときの障害について, 岩澤主予想の定式化という観点から述べる. その後で最近得られた現在最も正しい定式化であると思われている, 新しい非可換版の岩澤主予想 ([CFKSV]) を紹介する.

この非可換な場合の岩澤主予想は現在定式化が与えられた段階であり, 直ちに突き当たる困難 (そもそも p 進 L 関数が存在するかということなど) により解決には程遠い状態であることは最後に注意しておきたい.

2. 可換岩澤理論

本稿ではここから最後の節まで p を奇素数とし, E は p で good ordinary reduction を持つと仮定する. 即ち E を mod p で還元した曲線 $\tilde{E}$ は $\mathbb{F}_p$ 上非特異でかつ $\tilde{E}[p] \neq 0$ である. p で他の reduction を持つ場合, 特に p で (potentially) supersingular reduction を持つときは, Selmer 群や p 進 L 関数の性質が good ordinary の場合と大きく異なることを注意しておく. supersingular reduction の岩澤理論も最近研究が進展しているが, 難しいことが多いので, 非可換岩澤理論では主に ordinary case に限って研究されている.

楕円曲線の (可換) 岩澤理論は Mazur [Maz] により始まった. 参考文献として [Gr], [Ku], [HM], [Mat] などを挙げておく. 古典的岩澤理論の概略については [SS] を参照のこと.

まず最初に, 可換群 $G \cong \mathbb{Z}_p^d$ の場合の $\Lambda(G)$ 加群の構造定理を復習する. $\Lambda(G)$ は可換環であるが, $\Lambda(G) \cong \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2, \cdots, T_d]]$ (d 変数巾級数環) という同型があり非常に性質のよい環である. 特に整域なので, $\Lambda(G)$ 加群の torsion 性の定義は明らかであると思う. 更に torsion 加群の subclass として pseudo-null 加群が次のように定義される:

定義 2.1. $G \cong \mathbb{Z}_p^d$ のとき, $\Lambda(G)$ 加群 M が pseudo-null とは, $\mathrm{ht}(\mathrm{Ann}_{\Lambda(G)}(M)) \geq 2$ であることをいう. 但し, $\mathrm{Ann}_{\Lambda(G)}(M) := \{\lambda \in \Lambda(G) \mid$ 全ての $m \in M$ に対し $\lambda m = 0\}$ は M の annihilator ideal, ht は ideal の高さを表す.

$G \cong \mathbb{Z}_p$ のときは pseudo-null 加群であることと有限群であることは同値である. pseudo-null 加群は torsion 加群の中で "小さい" 加群と見ることが出来る. $\Lambda(G)$ 上の torsion 加群に対し次の構造定理が成り立つ.

定理 2.2 (Iwasawa, Serre, cf. [NSW] Chap. 5, [SS])**.** 有限生成 torsion $\Lambda(G)$ 加群 M に対し, $\Lambda(G)$ の元 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ があって次のような準同型 φ で kernel と cokernel が共に pseudo-null 加群となるものが存在する:

$$\varphi : M \to \oplus_{i=1}^{n} \Lambda(G)/(f_i).$$

そこで $\Lambda(G)$ の単項イデアルとして

$$\mathrm{char}_{\Lambda(G)}(M) := (\prod_i f_i) \tag{2.1}$$

と定義すると, これは φ のとり方によらず torsion 加群 M の不変量となる. これを M の "characteristic ideal" とよぶ.

さて, 可換岩澤理論と一口に言っても, どのような拡大を考えるかで様々な理論が展開され手法もそれぞれ異なるのだが, ここでは代表としていわゆる円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の理論について簡単に復習する. $n \geqq 1$ に対し, μ_{p^n} を 1 の p^n 乗根のなす群とし, $\mu_{p^\infty} = \cup_n \mu_{p^n}$ とする. $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ を $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ の部分体で $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群が $\mathbb{Z}_p$ に同型となる唯一の体とする. これを $\mathbb{Q}$ の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大という. 慣習に従い G ではなくここでは $\Gamma := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q})$ と書く. $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$ であるから, $\Lambda(\Gamma)$ 加群に対し上に述べた構造定理が使える.

ここで K_∞ として $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ をとり, 楕円曲線 E の $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ 上の Selmer 群 $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}})$ を考えると, まず次が知られている:

定理 2.3 ([Ka1], [Ru])**.** E が p で good ordinary reduction を持つとき, $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}})^\vee$ は有限生成 $\Lambda(\Gamma)$-torsion 加群である.

次に p 進 L 関数を定義するために, L 関数について復習する: ρ を $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の Artin 表現とする. 各素数 q に対し, q と異なる素数 l をとり E の l-Tate 加群 $T_l(E) := \varprojlim_n E[l^n]$ を考え, $V_l(E) := T_l(E) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ とおく. ρ は $\overline{\mathbb{Q}_l}$ 上実現されるから, その表現空間を $W_l(\rho)$ と書く.

$$P_q(E,\rho,X) := \det(1 - \mathrm{Frob}_q X | \{V_l(E) \otimes_{\mathbb{Q}_l} W_l(\rho)\}^{I_q}) \tag{2.2}$$

とおくと, これは l によらず $P_q(E,\rho,X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ である. ここで Frob_q は q での Frobenius 元の一つ, I_q は対応する惰性群とする. E の ρ でひねった Hasse-Weil L 関数は $L(E,\rho,s) := \prod_q P_q(E,\rho,q^{-s})^{-1}$ として定義される. これは $\mathrm{Re}(s) > 3/2$ で絶対収束する正則関数である. 特に ρ が Abel 指標であれば, 全平面に解析接続されることが知られている.

(円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の) p 進 L 関数は次のようなものである: まず Artin 表現 ρ が $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の商 G を経由するとき, 対応する準同型 $\rho : G \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}_p})$ は自然に $\mathbb{Z}_p$ 代数の準同型

$$\rho : \Lambda(G) \to M_n(\overline{\mathbb{Q}_p})$$

に延びることに注意する. 特に $n = 1$ なら ρ は $\overline{\mathbb{Q}_p}$ に値を取る. 次については [Ha1] も参考文献に挙げておく.

定理 2.4 ([MSD], [MTT])**.** 次をみたす $\mathcal{L}_p(E) \in \Lambda(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ が唯一つ存在する: $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q})$ を経由する任意の既約 Artin 表現 ρ (Γ は Abel なので 1 次元表現, 即ち Dirichlet 指標と同一視される) に対し,

$$\rho(\mathcal{L}_p(E)) = \frac{L(E,\overline{\rho},1)}{\Omega_E^+} \cdot \tau(\rho) \cdot (1 - \rho(p)\alpha^{-1})(1 - \overline{\rho}(p)\alpha^{-1}) \cdot \alpha^{-f_\rho}.$$

但し $\overline{\rho}$ は ρ の複素共役, Ω_E^+ は $E/\mathbb{Q}$ の (実) Neron 周期, $\tau(\rho)$ は Gauss 和, p^{f_ρ} は ρ の conductor とする. $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ は次のように定める: $\rho_0 = 1$ (自明表現) に対する L 関数の

p-Euler 因子は $P_p(E,\rho_0,X)=1-a_pX+pX^2$ $(a_p\in\mathbb{Z})$ と書ける. good ordinary という条件は $a_p\not\equiv 0 \mod p$ と同値であるので, $\mathbb{Z}_p[X]$ 内で $P_p(E,\rho_0,X)=(1-\alpha X)(1-\beta X)$, $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$, $\beta\in p\mathbb{Z}_p$ と分解できる.

注意すべきは, 上式左辺は $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の元, 右辺の $L(E,\overline{\rho},1)$ などは $\mathbb{C}$ の元なのであるが, 右辺全体は代数的 ($\overline{\mathbb{Q}}$ の元) であることが示されている. そこであらかじめ $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\overline{\mathbb{Q}_p}$ と $\mathbb{C}$ への埋め込みを固定しておいた上で, 全ての議論を行う必要がある.

岩澤主予想は次のように簡潔に表現される:

予想 2.5 (岩澤主予想, Mazur)**.** $\mathcal{L}_p(E)\in\Lambda(\Gamma)$ であり,

$$\mathrm{char}_{\Lambda(\Gamma)}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}})^\vee)=(\mathcal{L}_p(E)).$$

この予想は E が虚数乗法 (CM) を持つ場合には [Ru] により解決されている. CM を持たない場合には [Ka1] により p 巾の誤差を除いて $\supset$ の包含関係が証明されており, 更に最近 Skinner-Urban が $\subset$ の包含関係を示したとアナウンスしている.

3. 非可換の場合: torsion 性等

最初の発想としては, 楕円曲線の岩澤理論では考えるべき無限次 Galois 拡大 K_∞ として, $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ より E の p 巾分点を全て付け加えた体 $\mathbb{Q}(E[p^\infty])$ を考えるほうが自然なのではないか, ということである.

これは E が CM を持つ場合はうまくいく. というのはこの場合 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p^\infty])/\mathbb{Q})$ はほぼ可換, 即ち有限指数開部分群として $G\cong\mathbb{Z}_p^2$ となるものを含むからである. つまり定理 2.2 の構造定理と characteristic ideal の定義 (2.1) が使える. 実際, p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p(E)$ が $\Lambda(G)$ $(G\cong\mathbb{Z}_p^2)$ の元として定義され (Katz, Yager), 岩澤主予想が予想 2.5 と全く同じ形で定式化される: $\mathrm{char}_{\Lambda(G)}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}(E[p^\infty]))^\vee)=(\mathcal{L}_p(E))$. これは [Ru] により証明された.

さて, そこで問題は E が CM を持たない場合である. このとき $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p^\infty])/\mathbb{Q})$ は $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の開部分群となり (Serre), 4 次元 p 進 Lie 群の大きな非可換群となる. この場合を GL_2-case と言ったりする. このような群についての岩澤理論の研究は Harris [Hr1] が最初 (1980 年前後) で, 90 年代以降 Coates が中心となり牽引してきたが, 非常に難しく分かっていることはごくわずかである. そこでより柔軟に, $G=\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q})$ が一般の compact p 進 Lie 群になるような K_∞ に対してどうなるかも考えられている (p 進 Lie 群とは, 通常の Lie 群の定義において実数体 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}_p$ に置き換えたものである. [Bou] 第 3 章参照).

一般の無限次拡大でなく p 進 Lie 拡大を考えるのは, $\Lambda(G)$ が次のようなよい性質を持つということがある:

命題 3.1 ([La], cf. [DdMS] Cor. 7.25, 7.26)**.** G が compact p 進 Lie 群のとき, $\Lambda(G)$ は左右 Noether 環である. G が pro-p なら局所環となる. 更に p-torsion 元を持たないとすると, $\Lambda(G)$ は 0 以外の zero-divisor を持たない.

そこで G が pro-p で p-torsion を持たないとき, $\Lambda(G)$ 加群 M が torsion であるとは, ”任意の $m \in M$ に対してある $\lambda \in \Lambda(G)$ があって $\lambda m = 0$ となる” ことと定義できる. 一般の p 進 Lie 群 G は開部分群 U として pro-p で p-torsion を持たないものをもつので, $\Lambda(G)$ 加群として torsion であることを, $\Lambda(U)$ 加群として torsion であることとして定義する. これは U のとり方によらない.

以下, $K_\infty/\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ の有限個の素点のみが分岐する p 進 Lie 拡大とする. $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee$ はこのとき有限生成左 $\Lambda(G)$ 加群となるが, 更に円分理論の類似で次の予想がある.

予想 3.2. E が p で good ordinary reduction を持つとする. K_∞ が $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ を含めば $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee$ は $\Lambda(G)$-torsion であろう.

K_∞ が $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ を含まないときには $G \cong \mathbb{Z}_p$ の場合でも $\Lambda(G)$-torsion にならない場合があることを注意しておく.

この予想は GL_2-case 即ち $K_\infty = \mathbb{Q}(E[p^\infty])$ の場合 (K_∞ は $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ を含む), 有限個の (p, E) に対してしか成り立つ例が知られていない. それは次のような事情による: 可換理論の $K_\infty = \mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$, $G = \Gamma \cong \mathbb{Z}_p$ の場合にも, 定理 2.3 が証明される前には次の二つの事実が $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}})^\vee$ が $\Lambda(\Gamma)$-torsion になる例を与えていた.

命題 3.3. (i) (Mazur's control theorem). $E/\mathbb{Q}$ が p で good ordinary reduction を持つとき, 自然な restrition $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}})^\Gamma$ は kernel, cokernel 有限である.
(ii) (Strong Nakayama's lemma). M が compact で $\Lambda(\Gamma)$ が連続に作用する加群とする. もし Γ-coinvariant M_Γ が有限群なら M は有限生成 torsion $\Lambda(\Gamma)$ 加群である.

これにより, $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q})$ が有限 (このような例はたくさんある) なら $(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}})^\vee)_\Gamma \cong (\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}})^\Gamma)^\vee$ が有限であることが (i) から言え, 従って (ii) により $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}})^\vee$ が torsion となる. このような, 下の Selmer 群の情報から上の Selmer 群の情報を得る議論は, そもそも G が pro-p でなければ成り立たないのではあるが, 実は pro-p であっても命題 3.3 (ii) が成り立たない場合があるのである:

命題 3.4 ([BH])**.** G を pro-p かつ p-torsion を持たない群とする. G が非可解群であるとすると, compact $\Lambda(G)$ 加群 M で, M_G が有限群であるが $\Lambda(G)$-torsion ではないものが必ず存在する.

$GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の開部分群は非可解群である. GL_2-case の場合にも, K_∞/F が pro-p になる有限次拡大 F におきかえて考えると, 命題 3.3 (i) と同様のことは成り立つ. しかし, 上のような事実によって $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F)$ の有限性から $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee$ の $\Lambda(G)$-torsion 性は導くことが出来ない. 実は [Hr1] ではこのような反例の存在を見落としており, 誤った議論により可換理論と類似するいくつかの定理を ”証明” している. 命題 3.4 の発見は非可換岩澤理論の困難を示した最初の例といってよい. ([Hr1] の定理たちは [Ho], [Oc], [Hr2] により修復されている.)

非可解群の場合の torsion である例は, 次の原理によって得られる例しか知られていない.

命題 3.5 (cf. [CH])**.** K_∞ が $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ を含むとする. 次を満たす $\mathbb{Q}$ の有限次拡大 $F \subset K_\infty$ と楕円曲線 E' が存在するとき予想 3.2 は正しい: (i) $F_{\mathrm{cyc}} := F\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ $(\subset K_\infty)$ とおくとき,

$\mathrm{Gal}(K_\infty/F_{\mathrm{cyc}})$ は pro-p, (ii) E と E' は F_{cyc} 上 isogenous, (iii) $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E'/F_{\mathrm{cyc}})^\vee$ が $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成である.

これで得られる GL_2-case ($K_\infty = \mathbb{Q}(E[p^\infty])$) のよく使われる有名な例が, $E/\mathbb{Q}$ が (任意の) conductor 11 の楕円曲線で $p=5$ の場合である. この場合 $F=\mathbb{Q}(\mu_5)$, $E'=X_1(11)$ と取れて $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E'/F_{\mathrm{cyc}})=0$ となる. 一般には (iii) を示すことが非常に難しく, 常に成り立つかどうかも分からない.

一方 G が可解群の場合には事情が異なり, K_∞ での torsion 性が, 円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大体上での torsion 性から非常に弱い仮定の下で導かれる:

定理 3.6 ([HV] Theorem 2.8, [Ha2])**.** K_∞ が $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ を含むとする. 次を満たす $\mathbb{Q}$ の有限次拡大 $F\subset K_\infty$ が存在するとき, 予想 3.2 は正しい: (i) $U:=\mathrm{Gal}(K_\infty/F)$ は uniformly powerful, (ii) U は可解群, (iii) $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F_{\mathrm{cyc}})^\vee$ が $\Lambda(\Gamma)$-torsion (但し $F_{\mathrm{cyc}}=F\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$, $\Gamma:=\mathrm{Gal}(F_{\mathrm{cyc}}/F)\cong\mathbb{Z}_p$).

uniformly powerful 群の定義については [DdMS] Def. 4.1 参照. 特にそれは pro-p, torsion-free であり, 任意の compact p 進 Lie 群は, 有限指数の開部分群として uniformly powerful なものを含む (cf. [DdMS] Cor. 8.34). [HV] では $U\cong\mathbb{Z}_p\rtimes\mathbb{Z}_p$ の場合のみ示しているが, 上のように一般化するのは難しくない ([Ha2]). この定理では条件 (iii) が命題 3.5 の条件 (iii) より弱い. 特に F が $\mathbb{Q}$ 上 Abel なら (iii) はいつでも成り立つ ([Ka1], [Ru]: 定理 2.3 と同様).

この定理の帰結として例えば次のようなことが言える:

命題 3.7 ([HV] Cor.2.9)**.** $E/\mathbb{Q}$ が p で good ordinary とする. $a\in\mathbb{Q}^\times$ をとり, $k_n:=\mathbb{Q}(\mu_{p^n},\sqrt[p^n]{a})$ とおく. このとき (E, p, a に依存する) ある定数 C が存在し次が成り立つ:

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}E(k_n)\le Cp^n.$$

4. pseudu-null 加群と $\Lambda(G)$ 加群の構造定理

§2 や §3 の最初で述べたように, 可換 ($G\cong\mathbb{Z}_p^d$) の場合には $\Lambda(G)$ 加群の構造定理は岩澤主予想の定式化によく機能する. そこで非可換の場合にも pseudo-null 加群が定義できて, 加群の構造定理が成り立つことが期待される. それは実際以下に述べるように成立するのだが, その構造定理は様々な障害によって岩澤主予想の定式化には適さないのである. この章ではそれらについて説明する.

まず psuedo-null 加群を定義する. 非可換環の場合にも $\mathrm{Ann}_{\Lambda(G)}(M)$ は両側 ideal として定義されるが, まず ideal の高さが定義されない. その上, M が torsion だとしても, $\mathrm{Ann}_{\Lambda(G)}(M)=0$ であることが起こり得る (cf. 定理 4.4) ので, 定義 2.1 をそのまま使うことは適切でない. 詳しくは [Ve1], [OcVe], [CSS1] 参照. [HS], [Ha3] もご覧下さい.

左, または右 $\Lambda(G)$ 加群 M と整数 $i\ge 0$ に対して, $E^i(M):=\mathrm{Ext}^i_{\Lambda(G)}(M,\Lambda(G))$ と書くことにする. M が左 $\Lambda(G)$ 加群なら $E^i(M)$ は右 $\Lambda(G)$ 加群, M が右加群なら左加群の構造が入る. M の grade $j(M)$ を, $E^i(M)\ne 0$ となる最小の i と定義する.

定理 4.1 ([Ve1] Theorem 3.26)**.** G が p-torsion 元を持たないとする．このとき $\Lambda(G)$ は Auslander regular 環であり, その大域次元は $\dim(G)+1$ である．ここで Auslander regular とは, 大域次元が有限でありかつ次の条件 (Auslander 条件) を満たすことを言う: 任意の右, あるいは左 $\Lambda(G)$-加群 M と, 任意の整数 i に対し, $E^i(M)$ の任意の $\Lambda(G)$-部分加群 N について $j(N) \geq i$ となる.

次の性質は Auslander regular 性による: 有限生成左 $\Lambda(G)$ 加群 M には次のような canonical な filtration が入る:

$$M = \Delta^0(M) \supset \Delta^1(M) \supset \Delta^2(M) \cdots \supset \Delta^{d+1}(M) \supset 0.$$

ここで $\Delta^i(M)$ は, M の $\Lambda(G)$-部分加群 N たちのうちで $j(N) \geq i$ となる最大のものである．ここで $M = \Delta^1(M)$ であるという条件は $E^0(M) := \mathrm{Hom}_{\Lambda(G)}(M, \Lambda(G)) = 0$ であるということ, 即ち M は $\Lambda(G)$-torsion という条件と同値である．そこで, $\Lambda(G)$-torsion 加群より ”小さい” pseudo-null 加群を次で定義する:

定義 4.2 ([Ve1])**.** $\Lambda(G)$ 加群 M が pseudo-null とは, $M = \Delta^2(M)$, 即ち $j(M) \geq 2$ であることを言う.

$G \cong \mathbb{Z}_p^d$ のときは $j(M) = \mathrm{ht}(\mathrm{Ann}_{\Lambda(G)}(M))$ であることが知られている．つまり $j(M) \geq 2$ は $\mathrm{ht}(\mathrm{Ann}_{\Lambda(G)}(M)) \geq 2$ と同値だから, 上の pseudo-null の定義は定義 2.1 と一致する.

さて, G が p-valued という class の群について $\Lambda(G)$ 加群の構造定理が次のように成り立つ. p-valued の定義は [La], [CSS1] §7 等参照. uniformly powerful $\Rightarrow$ p-valued $\Rightarrow$ pro-p かつ p-torsion を持たないこと, 特に任意の compact p 進 Lie 群は有限指数の開部分群として p-valued なものを含むこと, などを注意しておく.

定理 4.3 ([CSS1])**.** G が p-valued であるとする．有限生成 torsion 左 $\Lambda(G)$ 加群 M に対し, reflexive な $\Lambda(G)$ の左 ideal $L_1, L_2, \cdots, L_n$ が存在し, 単射

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda(G)/L_i \to M/\Delta^2(M)$$

で, cokernel が pseudo-null になるものがある.

このように可換の場合と類似な構造定理が成り立つ (定理 2.2 と写像の向きが逆だが, 可換の場合には同値である)．しかし岩澤主予想の定式化を可能にする characteristic ideal のようなものを取り出すには, 以下に述べるようないくつかの超えがたい困難がある:

(1): $\{L_i\}_i$ らの何らかの意味での一意性が分かっていない．また, L_i が一つの元で生成されるとは限らない. $G \cong \mathbb{Z}_p^d$ のときは reflexive な ideal は単項 ideal であることが知られているのだが, 非可換な G の場合, 単項でない reflexive な左 ideal の例が存在する (cf. [Ve2] Appendix).

あるいは Selmer 群では特別に単項なものが取れると非常に楽観的に期待するとしても, characteristic ideal を可換の場合と同様に生成元たちを掛け合わせた単項 ideal により定義しようとすると, 非可換なので掛ける順番で異なる ideal になる可能性が大きい.

(2): それでも [CSS1] §5 において, 加群の"characteristic ideal" を定義する試みをしている. それは (左) $\Lambda(G)$-torsion 加群 M に対し, $\Lambda(G)$ の reflexive 両側 ideal を対応させるものである. しかし, この characteristic ideal は M が completely faithful だと 0 になってしまう ([CSS1] Lemma 5.2). ここで completely faithful とは M の任意の pseudo-null でない $\Lambda(G)$ 部分加群 N に対し $\mathrm{Ann}_{\Lambda(G)}(N/\Delta^2(N)) = 0$ となることである (cf. [CSS1], [Ve2] §6). 次の結果は Selmer 群が completely faithful になる場合が多いのではないかということを示唆している:

定理 4.4 ([Ve2] §4, §6, [HV] Theorem 3.7)**.** $\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大 F が存在して $F_{\mathrm{cyc}} \subset K_\infty$ かつ $\mathrm{Gal}(K_\infty/F_{\mathrm{cyc}}) \cong \mathbb{Z}_p$ であり, $G' = \mathrm{Gal}(K_\infty/F)$ は非可換であるとする (G' は 2 次元). $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F_{\mathrm{cyc}})^\vee$ が $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成であるならば, $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee$ は 0 でない限り $\Lambda(G')$ 加群として completely faithful である.

(3): もう一つの問題は, "Euler characteristic" と pseudo-null 加群の概念の両立性である. $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee$ から基礎体 $\mathbb{Q}$ 上の $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q})$ の情報が次のように取り出される: 以下 G は p-torsion をもたないと仮定する. 左 $\Lambda(G)$ 加群 M の Euler characteristic は, $\mathrm{Tor}_i^{\Lambda(G)}(\mathbb{Z}_p, M)$ ($\mathbb{Z}_p$ は自明な右 $\Lambda(G)$ 加群) が全ての i で有限群となるとき

$$\chi(G, M) := \prod_{i \geq 0} \sharp \mathrm{Tor}_i^{\Lambda(G)}(\mathbb{Z}_p, M)^{(-1)^i}$$

により定義され, このとき $\chi(G, M)$ が存在するという. 仮定により $\Lambda(G)$ の大域次元は有限なので有限積である. M が compact のとき, $\mathrm{Tor}_i^{\Lambda(G)}(\mathbb{Z}_p, M) \cong H^i(G, M^\vee)^\vee$ であることを注意しておく. 次の定理は G が可換の場合は Perrin-Riou, Schneider, GL_2-case で [CH], $\dim G = 2$ で [HV] による. [Ze] も参照. (完全に一般の K_∞ で示されてはいない.)

定理 4.5. 次を仮定する: (i) $p \geq 5$, (ii) E は p で good ordinary, (iii) $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q})$ は有限群, (iv) $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee$ は $\Lambda(G)$-torsion. このとき $\chi(G, \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee)$ は定義され,

$$\chi(G, \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee) = \frac{\sharp \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q})}{\sharp E(\mathbb{Q})[p^\infty]^2 \prod_l |c_l|_p} \times \sharp \tilde{E}(\mathbb{F}_p)[p^\infty]^2 \times \prod_{l \in \mathcal{P}} |P_l(E, \rho_0, l^{-1})|_p^{-1}.$$

ここで c_l は玉河因子, $|*|_p$ は正規化された p 進付値, $P_l(E, \rho_0, s)$ は自明表現に対する局所 l-Euler 因子 (2.2), $\tilde{E} = E \bmod p$, $\mathcal{P}$ は E と拡大 $K_\infty/\mathbb{Q}$ により定まる $\mathbb{Q}$ の p 上にない素点の有限集合である.

$G \cong \mathbb{Z}_p^d$ の場合には, $\Lambda(G)$-torsion 加群 M に対する $\chi(G, M)$ が characteristic ideal $\mathrm{char}_{\Lambda(G)}(M)$ から次のようにわかる: G の自明な Artin 表現 $\rho_0 = 1$ が誘導する環準同型 $\rho_0 : \Lambda(G) \to \mathbb{Z}_p$ による $\mathrm{char}_{\Lambda(G)}(M)$ の生成元の像は, $\mathbb{Z}_p^\times$ の因子を除けば生成元のとり方によらず定まる. これを $\rho_0(\mathrm{char}_{\Lambda(G)}(M))$ と書く. すると $\chi(G, M)$ が存在すれば,

$$\rho_0(\mathrm{char}_{\Lambda(G)}(M)) = \chi(G, M) \text{ in } \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$$

である. これにより, 例えば $K_\infty = \mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ ($G = \Gamma \cong \mathbb{Z}_p$) の場合, 上の定理と定理 2.4 を合わせれば, (一番簡単な場合の) B-SD の p-part が岩澤主予想の帰結として得られるのである. これは岩澤主予想の定式化が当然満たすべき性質であろう.

この観察から非可換の場合も, 主予想の定式化のために定義されるはずの $\Lambda(G)$-torsion 加群 M の "characteristic element" $\mathrm{char}(M)$ が, 次の性質を持つことが期待される: $\mathrm{char}(M)$ は何らかの意味で ρ_0 によって specialize され, $\chi(G,M)$ が存在するとき $\rho_0(\mathrm{char}(M)) \in \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$ であって $\rho_0(\mathrm{char}(M)) = \chi(G,M) \bmod \mathbb{Z}_p^\times$ となる.

そこで, これが成り立つように up to pseudo-null の構造定理から characteristic element が定義できたとしよう. すると pseudo-null 加群 M は当然, この枠組みの中では自明なものとみなされなければならない. 故に $\mathrm{char}(M)$ も自明なものでなければならず, その specialization も自明, $\rho_0(\mathrm{char}(M)) = 1$ である. これと上に述べた "期待される性質" をあわせれば, pseudo-null 加群 M に対しては, $\chi(G,M)$ が存在するならば $\chi(G,M) = 1$ でなければならないことになる. $G \cong \mathbb{Z}_p^d$ のときはこれは正しいわけだが, 非可換のときは次のような事実があり構造定理が岩澤主予想の定式化と折り合いが悪いことがわかる:

命題 4.6 (cf. [CSS2] §4)**.** 非可換群 G で, これまで例などに挙げてきたような群 ($\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$, $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ など) について, $\Lambda(G)$ 加群 M で pseudo-null であるが $\chi(G,M) \neq 1$ となるものが存在する.

5. 岩澤主予想の定式化

そこで pseudo-null の概念を捨て, 前節の最後に述べた Euler characteristic との両立という要請を満たすものとして次に述べる岩澤主予想の定式化が考え出された. 本節については全て [Ve3], [CFKSV], [FK], [Ka3], [Co], [Ka2] を参照.

以下次の仮定をおく: G は p-torsion を持たない. 更に K_∞ は $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ を含む, 即ち G は $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$ なる商を持つ.

$H := \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}})$ ($\subset G$) とおく. $\Lambda(G)$ の部分集合

$$S := \{ f \in \Lambda(G) \mid \Lambda(G)/\Lambda(G)f \text{ が } \Lambda(H) \text{ 上有限生成} \}$$

とおき, $S^* := \cup_{n\geq 0} p^n S$ とおく.

定理 5.1 ([CFKSV])**.** S^* は左右分母条件を満たす積閉集合 (Ore set) である. また S^* は zero-divisor を含まない.

左右分母条件については, [Ta] 等参照. 積閉集合 S^* による非可換環の局所化 $\Lambda(G)_{S^*}$ は可換環の場合と同様, 環準同型 $\Lambda(G) \to \Lambda(G)_{S^*}$ が与えられていて, 任意の $\Lambda(G) \to R$ で S^* の像が $R^\times$ に入る環準同型が $\Lambda(G)_{S^*}$ を唯一通りに経由するものとして定義される. しかし分母条件がないと, よい性質の環にならない ($\Lambda(G)$ 上の平坦性など: cf. [Ta]).

有限生成左 $\Lambda(G)$ 加群 M が S^*-torsion とは M の各元が S^* のある元で消されることをいう. $\mathfrak{M}_H(G)$ をそのような加群全体のなす圏とすると, 次の K 群の完全列が存在する:

$$K_1(\Lambda(G)) \to K_1(\Lambda(G)_{S^*}) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathfrak{M}_H(G)) \to 0 \tag{5.1}$$

(∂ の全射性は自明ではない). また, canonial な全射 $\Lambda(G)^\times \to K_1(\Lambda(G))$ と $\Lambda(G)_{S^*}^\times \to K_1(\Lambda(G)_{S^*})$ がある.

定義 5.2. 有限生成左 S^*-torsion 加群 M に対し, $\xi(M) \in K_1(\Lambda(G)_{S^*})/\mathrm{Im}(K_1(\Lambda(G)))$ を $\partial(\xi(M)) = [M]$ となる元として定め, M の characteristic element と呼ぶ. ($[M]$ は M の $K_0(\mathfrak{M}_H(G))$ での class.)

注意 5.3. この characteristic element が §2 (2.1) で定義した, 可換の場合の characteristic ideal の一般化であることは, $G \cong \mathbb{Z}_p^d$ のときには次のように両者を同一視できることから了解される: $\Lambda(G)$ は局所可換環なので, 全射 $\Lambda(G)^\times \to K_1(\Lambda(G))$, $\Lambda(G)_{S^*}^\times \to K_1(\Lambda(G)_{S^*})$ は同型である. 整域だから $\Lambda(G)^\times \subset \Lambda(G)_{S^*}^\times \subset Q(\Lambda(G))^\times$ ($Q(\Lambda(G))$ は商体) であり, $K_1(\Lambda(G)_{S^*})/\mathrm{Im}(K_1(\Lambda(G))) \cong \Lambda(G)_{S^*}^\times/\Lambda(G)^\times \subset Q(\Lambda(G))^\times/\Lambda(G)^\times$ である. ここで S^*-torsion 加群 M に対し, $\xi(M)$ の $Q(\Lambda(G))^\times/\Lambda(G)^\times$ における像を再び $\xi(M)$ と書くことにすると,

$$\mathrm{char}_{\Lambda(G)}(M) = (\xi(M))$$

となることを示すことができる. 単項 ideal の生成元は mod $\Lambda(G)^\times$ で unique に定まることに注意.

また特に $d = 1$ ($G \cong \mathbb{Z}_p$, $H = 1$) の場合, S^*-torsion は $\Lambda(G)$-torsion と同値である.

注意 5.4. G が pro-p かつ torsion free の場合, $\Lambda(G) - \{0\}$ も左右分母条件を満たし, その局所化は商斜体 $Q(\Lambda(G))$ である. $C^0(G)$ を有限生成左 torsion $\Lambda(G)$ 加群全体のなす圏とすると, (5.1) と同様に完全列

$$K_1(\Lambda(G)) \to K_1(Q(\Lambda(G))) \to K_0(C^0(G)) \to 0$$

があり, これを用いたほうが自然なように見える. しかしここで我々は再び前節と同様の障害に出会う: 即ち G が非可換のとき, torsion 加群 M で $K_0(C^0(G))$ においては $[M] = 0$ であるが, $\chi(G, M) \neq 1$ となるものが存在する場合がある (cf. [CSS2] §4). また, S^* を用いた定式化では G を pro-p と仮定しなくてよいのが利点である,

さて, Euler characteristic との両立性だが, $\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 L の整数環とし $\rho : G \to GL_d(\mathcal{O})$ を G の Artin 表現とする. $\mathcal{O}^d$ を階数 d の自由 $\mathcal{O}$-行ベクトル空間で, ρ の自然な延長 $\rho : \Lambda(G) \to M_d(\mathcal{O})$ を通じて $\Lambda(G)$ が右から作用する加群とする. 左加群 M の ρ でひねった Euler characteristic を, $\mathrm{Tor}_i^{\Lambda(G)}(\mathcal{O}^d, M)$ が全ての i で有限群となるときに

$$\chi(G, \rho, M) := \prod_{i \geq 0} \sharp\mathrm{Tor}_i^{\Lambda(G)}(\mathcal{O}^d, M)^{(-1)^i}$$

によって定義する. また ρ は $\rho : K_1(\Lambda(G)) \to K_1(M_d(\mathcal{O}))$ を誘導するが, 森田同値により canonical な同型 $K_1(M_d(\mathcal{O})) \cong K_1(\mathcal{O}) \cong \mathcal{O}^\times$ がある.

定理 5.5 ([CFKSV])**.** 準同型 $\rho : K_1(\Lambda(G)) \to \mathcal{O}^\times$ は

$$\rho : K_1(\Lambda(G)_{S^*}) \to L \cup \{\infty\}$$

に自然に延長される. 更に S^*-torsion 加群 M に対し, ρ でひねった Euler characteristic が定義されるならば $\rho(\xi(M)) \neq 0, \neq \infty$ であって,

$$\chi(G, \rho, M) = |\rho(\xi(M))|_p^{-m_\rho}$$

となる. 但し $m_\rho = [L : \mathbb{Q}_p]$ である.

Selmer 群をこの枠組みの中で考えるには勿論, 予想 3.2 より強い次の仮定が必要である. これは命題 3.5 の仮定が成り立つときには正しい:

予想 5.6. $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee$ は S^*-torsion であろう.

また, p 進 L 関数

$$\mathcal{L}_p(E) \in K_1(\Lambda(G)_{S^*})$$

が, 次を満たすものとして存在することが期待される: 任意の G の Artin 表現 ρ に対し,

$$\rho(\mathcal{L}_p(E)) = \frac{L(E,\hat{\rho},1)}{\Omega_E^{+\,d^+(\hat{\rho})}\Omega_E^{-\,d^-(\hat{\rho})}} \cdot e_p(\rho) \cdot \frac{P_p(\rho,\alpha^{-1})}{P_p(\hat{\rho},\beta^{-1})} \cdot P_p(E,\hat{\rho},p^{-1}) \cdot \alpha^{-f_\rho} \cdot \prod_{l\in\mathcal{P}} P_l(E,\hat{\rho},l^{-1}).$$

ここで, $\hat{\rho}$ は ρ の反傾表現, $\Omega_E^\pm$ は実と虚の Neron 周期, $d^\pm(\hat{\rho})$ は複素共役が ±1 倍で作用する $W_p(\hat{\rho})$ の部分空間の次元, $e_p(\rho)$ は ρ の p での local ε-factor, α, β は自明表現 ρ_0 に対する $P_p(E,\rho_0,X) = 1 - a_pX + pX^2$ を $(1-\alpha X)(1-\beta X)$ と書いたとき, $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ であるものとする. また, $P_p(\rho,X)$ は ρ の Artin L 関数の p-Euler 因子を表す. f_ρ は p^{f_ρ} が ρ の conductor の p-part となるものである. $\mathcal{P}$ は 定理 4.5 ででてきたものと同じ集合とする. §2 で定義した ρ (resp. $\hat{\rho}$) でひねった L 関数は, [CFKSV] での定義では $\hat{\rho}$ (resp. ρ) でひねった L 関数に等しいことを注意しておく.

勿論 $L(E,\hat{\rho},1)$ の存在 (解析接続), 更に $\dfrac{L(E,\hat{\rho},1)}{\Omega_E^{+\,d^+(\hat{\rho})}\Omega_E^{-\,d^-(\hat{\rho})}} \in \overline{\mathbb{Q}}$ かどうかは一般には分かっていない. 岩澤主予想は次である:

$$\xi(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K_\infty)^\vee) = \mathcal{L}_p(E) \bmod \mathrm{Im}(K_1(\Lambda(G))).$$

References

[BH] P. Balister and S. Howson, *Note on Nakayama's Lemma for compact Λ-modules*, Asian J. Math. **1** (1997), 224-229.

[Bou] N. ブルバキ (杉浦光夫訳), 数学原論 "Lie 群と Lie 環 2", 東京図書 (1973).

[Co] J. Coates, *The main conjectures of non-commutative Iwasawa theory*, 数理解析研究所講究録 **1376** (2004), 1–5.

[CFKSV] J. Coates, T. Fukaya, K. Kato, R. Sujatha and O. Venjakob, *The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, preprint (2004); arXiv:math.NT/0404297.

[CH] J. Coates and S. Howson, *Euler characteristics and elliptic curves II*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 175–235.

[CSS1] J. Coates, P. Schneider and R. Sujatha, *Modules over Iwasawa algebras*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 73–108.

[CSS2] J. Coates, P. Schneider and R. Sujatha, *Links between cyclotomic and GL_2 Iwasawa theory*, Documenta Math., Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth birthday (2003), 187–215.

[DdMS] J. Dixon, M. du Sautoy, A. Mann and D. Segal, *Analytic pro-p groups*, second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 61, Cambridge University Press (1999).

[FK] T. Fukaya and K. Kato, *A formulation of conjectures on p-adic L-functions in non-commutative Iwasawa theory*, in preparation.

[Gr] R. Greenberg, *Iwasawa theory for elliptic curves*, L. N. M., **1716** Springer, (1999), 51–144.

[Ha1] 八森祥隆, 楕円曲線の p 進 L 関数, 第 9 回整数論サマースクール "ゼータ関数" 報告集 (2002), 135–151.

[Ha2] Y. Hachimori, *Relation between the coranks of* $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/k_\infty)$ *and* $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/k_{cyc})$ *over Iwasawa algebras*, note unpublished (2003).

[Ha3] 八森祥隆, p 進 Lie 拡大の岩澤理論におけるある岩澤加群の non-pseudo-nullity について, 早稲田大学整数論研究集会報告集 (2004), 120–128.

[HM] 八森祥隆, 松野一夫, 楕円曲線の岩澤理論における木田の公式について, 数理解析研究所講究録 1026 (1998), 43–62.
[HS] Y. Hachimori and R. T. Sharifi, *On the failure of pseudo-nullity of Iwasawa modules*, to appear in J. Algebraic Geom.; arXiv:math.NT/0406366.
[HV] Y. Hachimori and O. Venjakob, *Completely faithful Selmer groups over Kummer extensions*, Documenta Math., Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003), 443–478.
[Hr1] M. Harris, *p-adic representations arising from descent on Abelian varieties*, Compositio Math. **39** (1979), 177–245.
[Hr2] M. Harris, *Correction to: p-adic representations arising from descent on abelian varieties*, Compositio Math. **121** (2000), 105–108.
[Ho] S. Howson, *Iwasawa theory of elliptic curves for p-adic Lie extensions*, Ph.D. thesis, University of Cambridge (1998).
[Ka1] K. Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, to appear.
[Ka2] 加藤和也, 非可換岩澤理論における岩澤 main conjecture, 数理解析研究所講究録 **1376** (2004), 6–12.
[Ka3] K. Kato, K_1 *of some non-commutative group rings*, preprint (2004).
[Ku] 栗原将人, 岩澤理論の一般化についての概説, 数理解析研究所講究録 **925** (1995), 53–65.
[La] M. Lazard, *Groupes analitiques p-adiques*, Publ. Math. IHES **26** (1965), 389–603.
[Mat] 松野一夫, 楕円曲線の岩澤理論とセルマー群の構造について, 第 45 回代数学シンポジウム報告集 (2001).
[Maz] B. Mazur, *Rational points of Abelian varieties with values in towers of number fields*, Invent. Math. **18** (1972), 183–266.
[MSD] B. Mazur and P. Swinnerton-Dyer, *Arithmetic of Weil Curves*, Invent. Math. **25** (1974), 1–61.
[MTT] B. Mazur, J. Tate and J. Teitelbaum, *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. **84** (1986), 1–48.
[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, and K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
[Oc] Y. Ochi, *Iwasawa modules via homotopy theory*, Ph.D. thesis, University of Cambridge (1999).
[OcVe] Y. Ochi and O. Venjakob, *On the structure of Selmer groups over p-adic Lie extensions*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), 547–580.
[Ru] K. Rubin, *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields*, Invent. Math. **103** (1991), 25–68.
[SS] 2003 年度整数論サマースクール "岩澤理論" 報告集 (2004).
[Ta] 谷崎俊之, 環と体 3, 岩波現代数学の基礎 (1998).
[Ve1] O. Venjakob, *On the structure theory of the Iwasawa algebra of a p-adic Lie group*, J. Eur. Math. Soc. **4** (2002), 271–311.
[Ve2] O. Venjakob, *A noncommutative Weierstrass preparation theorem and applications to Iwasawa theory*, with an appendix by D. Vogel, J. Reine angew. Math. **559** (2003), 153–191.
[Ve3] O. Venjakob, *Characteristic elements in noncommutative Iwasawa theory*, Habilitation thesis, Heidelberg University (2003); arXiv:math.NT/0311446.
[Ze] S. Zerbes, *Selmer Groups over p-adic Lie Extensions I, II*, preprint (2004); arXiv:math.NT/0404203, 0404431.

21 世紀 COE プログラム研究拠点形成特任研究員

e-mail: `yhachi@ms.u-tokyo.ac.jp`

現在:

Postdoctoral Fellow of CICMA

Concordia University, 1455 de Maisonneuve Blvd. West,

Montreal, Quebec, H3G 1M8, CANADA

e-mail: `yhachi@mathstat.concordia.ca`