1. p 進 L 関数の岩澤による構成について (全集 [48] の紹介)

八森祥隆（東京理科大学理工学部）

1.1 序

本稿は論文 [Iw5] (全集 [Iw7] の論文 [48]) の内容を解説する．ここで説明することは, この論文以後に書かれた [Iw6] や岩澤理論の標準的教科書である [Wa2] にも丁寧に書かれてあるので, それらも参照していただきたい.

[Iw5] の主結果は, Kubota-Leopoldt により発見された p 進 L 関数 ([K-L]) の, 彼らとは異なる構成を与えたことである．([K-L] の構成については §1.5 注意 1.5.1 を参照.) この構成は岩澤理論に非常によく適合するもので (cf. §1.7), Iwasawa がこれより以前の十年余にわたり研究してきた円分体の理論に更に大きな意味を付与した結果であるといえる.

詳しく述べるために, まず p 進 L 関数について説明する．簡単のため p を奇素数とする．([Iw5] はもちろん $p=2$ の場合も同時に扱うが, ここでは割愛する.) p 進整数環 $\mathbf{Z}_p$ の単数群を

$$\mathbf{Z}_p^\times \cong \mu_{p-1} \times (1+p\mathbf{Z}_p), \ \ a \mapsto (\omega(a), < a >)$$

と直積分解する．但し μ_{p-1} は $\mathbf{Z}_p$ に含まれる 1 の $p-1$ 乗根全体のなす群であり, $\omega(a) \in \mu_{p-1}$ は $\omega(a) \equiv a \pmod{p\mathbf{Z}_p}$ により, $< a >$ は $a = \omega(a) \cdot < a >$ により特徴付けられるものである.

$\mathbf{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbf{Q}}$ の, $\mathbf{C}$ 及び $\overline{\mathbf{Q}_p}$ (p 進体 $\mathbf{Q}_p$ の代数閉包) への埋め込み

$$\mathbf{C} \overset{\iota_\infty}{\hookleftarrow} \overline{\mathbf{Q}} \overset{\iota_p}{\hookrightarrow} \overline{\mathbf{Q}_p} \tag{1.1}$$

を一つずつ固定しておく．χ を導手 N の Dirichlet 指標とする．χ は群準同型 $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$ であるが, $\overline{\mathbf{Q}}$ に値をとるので, 上で定めた埋め込みを通じて

$$\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \overline{\mathbf{Q}_p}^\times$$

と考えることができる．また上で定めた ω は, $\mathbf{Z}_p^\times \twoheadrightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ を経由する準同型なので $\omega : (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \to \mu_{p-1} \subset \mathbf{Z}_p^\times \subset \overline{\mathbf{Q}_p}^\times$ なる導手 p の Dirichlet 指標とみ

ることができる (Teichmuller 指標). 以上の準備のもとに, p 進 L 関数とは次のようなものである.

定理 *1.1.1 (*Kubota-Leopoldt [K-L]). 奇指標 χ, 即ち $\chi(-1) = -1$ を満たす Dirichlet 指標に対し, s を変数とする連続関数

$$L_p(s, \chi^{-1}\omega) : \mathbf{Z}_p - \{1\} \to \overline{\mathbf{Q}_p}$$

で, $k \geq 1$ なる任意の整数 $k \in \mathbf{Z}$ に対し

$$L_p(1-k, \chi^{-1}\omega) = (1 - \chi^{-1}\omega^{1-k}(p)p^{k-1})L(1-k, \chi^{-1}\omega^{1-k}) \tag{1.2}$$

を満たすものが唯一つ存在する. ここで右辺の $L(s, \chi^{-1}\omega^{1-k})$ は指標 $\chi^{-1}\omega^{1-k}$ の Dirichlet L 関数である. $L(s, \chi^{-1}\omega^{1-k})$ は複素解析的関数であるが, 整数点 $s = 1-k$ では $\overline{\mathbf{Q}}$ に値をとることが知られているので, (1.1) で定めた埋め込み ι_∞, ι_p を通じて $\overline{\mathbf{Q}_p}$ の元とみなすものとする.

$\{1-k \mid k \in \mathbf{Z},\ k \geq 1\}$ は $\mathbf{Z}_p - \{1\}$ の dense な部分集合なので, 上のような連続関数 $L_p(s, \chi^{-1}\omega)$ は存在すれば唯一つである. よって問題はその存在であり, [Iw5] では次のように示す. $K = \mathbf{Q}_p(\chi) \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$ を $\mathbf{Q}_p$ に χ の値を全て付加した体とし, $\mathcal{O} = \mathbf{Z}_p[\chi]$ をその整数環とする. $\Lambda = \mathcal{O}[[T]]$ を $\mathcal{O}$ を係数とするべき級数環とする. また χ の導手 N を $N = m_0 p^e \quad ((m_0, p) = 1,\ e \geq 0)$ と書くとき, $q_0 = m_0 p$ とおく. このとき $(c, q_0) = 1$ かつ $c \neq \pm 1$ なる整数 c を補助的なパラメータとする 2 つのべき級数 $f(T; \chi, c)$, $u(T; \chi, c) \in \mathcal{O}[[T]]$ で,

$$\frac{f((1+q_0)^{1-k} - 1; \chi, c)}{u((1+q_0)^{1-k} - 1; \chi, c)} = (1 - \chi^{-1}\omega^{1-k}(p)p^{k-1})L(1-k, \chi^{-1}\omega^{1-k}) \tag{1.3}$$

が $k \geq 1$ なる任意の整数 $k \in \mathbf{Z}$ に対して成り立つものを構成する. ここで, $(1+q_0)^{1-k} - 1 \in p\mathbf{Z}_p$ であること, $h(T) \in \mathcal{O}[[T]]$ と $\alpha \in p\mathbf{Z}_p$ に対し $h(\alpha)$ は収束して $\mathcal{O}$ の元を与えることに注意する.

よく知られているように $t \mapsto (1+q_0)^t$ で定まる準同型 $\mathbf{Z} \to 1 + p\mathbf{Z}_p$ は $\mathbf{Z}_p \to 1 + p\mathbf{Z}_p$ に連続に伸びて全単射準同型となる. また $h(T) \in \mathcal{O}[[T]]$ に対し $\alpha \mapsto h(\alpha)$ なる写像 $p\mathbf{Z}_p \to \mathcal{O}$ は連続である. よって合成写像

$$\begin{aligned} &\mathbf{Z}_p \to 1 + p\mathbf{Z}_p \to p\mathbf{Z}_p \to \mathcal{O} \\ &s \mapsto (1+q_0)^s \mapsto (1+q_0)^s - 1 \mapsto h((1+q_0)^s - 1) \end{aligned}$$

も連続であり, 従って $s \mapsto \dfrac{f((1+q_0)^s - 1; \chi, c)}{u((1+q_0)^s - 1; \chi, c)}$ は, $u((1+q_0)^s - 1; \chi, c) \neq 0$ なる範囲で連続関数である. そこで

$$L_p(s, \chi^{-1}\omega) = \frac{f((1+q_0)^s - 1; \chi, c)}{u((1+q_0)^s - 1; \chi, c)}$$

とおけば, これが定理 1.1.1 の条件を満たす連続関数となる.

注意 *1.1.2.* $(1+q_0)^s - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_p^n(1+q_0)}{n!} s^n$ が成り立つ (但し $\log_p(1+q_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} q_0^n$) ので, $h((1+q_0)^s - 1)$ は更に強く解析的な関数であり, $L_p(s, \chi^{-1}\omega)$ は有理型関数である. また関数の定義域を $\{s \in \mathbf{C}_p \mid |s|_p < p^{p-2/p-1}\} - \{1\}$ まで伸ばすことができる ($\mathbf{C}_p$ は $\overline{\mathbf{Q}_p}$ の完備化, $|*|_p$ は正規化された付値).

以下 [Iw5] に沿い, §1.2 でここでの p 進 L 関数の構成に必要な完備群環について述べる. §1.3, §1.4, §1.5 で $f(T;\chi,c)$, $u(T;\chi,c)$ を構成し, (1.3) を満たすことを示す. §1.6 では Dirichlet 指標を第一種と第二種に分けることとその p 進 L 関数への応用を説明する. §1.7 で円分体の数論との関係を述べる. §1.8 では論文から離れ, p 進 L 関数の様々な構成法と一般化について触れる.

1.2 群環とべき級数環

この節では, $f(T;\chi,c)$ の構成に必要な完備群環を導入し, そのべき級数環との関係について述べる. $(m_0,p)=1$ とし, $q_n = m_0 p^{n+1}$ $(n \geq 0)$ とおく. これに対し

$$G_n = (\mathbf{Z}/q_n\mathbf{Z})^\times$$

とおく. $a \in \mathbf{Z}$, $(a,q_0)=1$ に対し, $\sigma_n(a) = a + q_n\mathbf{Z}$ $(\in G_n)$ と定義する. $m \geq n$ に対し

$$\pi_{m,n} : G_m \to G_n$$

を $\sigma_m(a) \mapsto \sigma_n(a)$ で定まる自然な全射準同型とする. G_n の部分群を

$$\begin{cases} \Gamma_n = \mathrm{Ker}(G_n \to G_0) = \{\sigma_n(a) \mid a \equiv 1 \pmod{q_0}\} \\ \Delta_n = \{\sigma_n(a) \mid a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}\} \end{cases}$$

とおくと, G_n の直積分解

$$G_n \cong \Delta_n \times \Gamma_n \ \ (\sigma_n(a) \mapsto (\delta_n(a), \gamma_n(a))) \tag{1.4}$$

を得る. 但し $\delta_n(a)$, $\gamma_n(a)$ は

$$\delta_n(a) \in \Delta_n \text{ かつ } \pi_{n,0}(\delta_n(a)) = \sigma_0(a), \ \ \sigma_n(a) = \delta_n(a) \cdot \gamma_n(a)$$

で特徴付けられるものである. $\Gamma_n \cong \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ であり, $\pi_{n,0}$ により Δ_n は $\Delta_0 = G_0$ と同型になる. また $\delta_n(ab) = \delta_n(a)\delta_n(b)$, $\gamma_n(ab) = \gamma_n(a)\gamma_n(b)$ が成り立つ.

$$\overline{\gamma_n} = \gamma_n(1+q_0) \ (= \sigma_n(1+q_0))$$

とおくと, Γ_n は $\overline{\gamma_n}$ で生成される. $\gamma_n(a) \mapsto \overline{<a>}$ により

$$\Gamma_n \cong (1+p\mathbf{Z}_p/1+p^{n+1}\mathbf{Z}_p)\ (\hookrightarrow (\mathbf{Z}_p/p^{n+1}\mathbf{Z}_p)^\times \hookrightarrow (\mathcal{O}/q_n\mathcal{O})^\times) \tag{1.5}$$

である. また $m \geq n$ に対し

$$\begin{array}{ccc} G_m & \xrightarrow{\cong} & \Delta_m \times \Gamma_m \\ {\scriptstyle \pi_{m,n}}\downarrow & & \downarrow \\ G_n & \xrightarrow{\cong} & \Delta_n \times \Gamma_n \end{array}$$

は可換. 但し右側の縦の写像は

$$\pi_{m,n}|_{\Delta_m} : \Delta_m \xrightarrow{\sim} \Delta_n\ (\delta_m(a) \mapsto \delta_n(a)),$$
$$\pi_{m,n}|_{\Gamma_m} : \Gamma_m \twoheadrightarrow \Gamma_n \quad (\gamma_m(a) \mapsto \gamma_n(a))$$

で与えられる. $\pi_{m,n}|_{\Gamma_m}$ による逆極限を

$$\Gamma = \varprojlim{}_n \Gamma_n$$

とおく. $a \in \mathbf{Z}$, $(a, q_0) = 1$ に対し $\gamma(a) = (\gamma_n(a))_{n\geq 0}$ は Γ の元であり, 特に $\gamma = (\overline{\gamma_n})_{n\geq 0}$ は Γ の位相的生成元となる.

$K \subset \overline{\mathbf{Q}_p}$ を $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体, $\mathcal{O}$ をその整数環とする. $R_n = \mathcal{O}[\Gamma_n]$ とおく ($\mathcal{O}$ を係数とする Γ_n の群環). 群準同型 $\pi_{m,n}|_{\Gamma_m} : \Gamma_m \to \Gamma_n$ が誘導する全射環準同型を同じ記号で

$$\pi_{m,n} : R_m \twoheadrightarrow R_n \tag{1.6}$$

で表すことにし, これによる逆極限を $R = \varprojlim{}_n R_n$ とおく. これを Γ の ($\mathcal{O}$ を係数とする) 完備群環と言う. 自然に $\Gamma \subset R$ である.

$\Lambda = \mathcal{O}[[T]]$ とし, $\omega_n = (1+T)^{p^n} - 1 \in \mathcal{O}[T] \subset \Lambda$ とおく. $\Gamma_n \cong \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ より, $\mathcal{O}[T]/(\omega_n) \cong R_n$ $(T \mapsto \overline{\gamma_n} - 1)$ である. また Λ に関する割り算アルゴリズム (cf. [Wa2] §7.1 Proposition 7.2, [SS] も参照) を ω_n に適用すると, 自然な準同型 $\mathcal{O}[T]/(\omega_n) \to \Lambda/(\omega_n)$ は全単射であることが分かる. これらより

$$R = \varprojlim{}_n R_n \cong \varprojlim{}_n \mathcal{O}[T]/(\omega_n) \cong \varprojlim{}_n \Lambda/(\omega_n)$$

を得る. (右辺の逆極限は自然な写像による. $m \geq n$ のとき $\omega_n | \omega_m$ に注意.) Λ は極大イデアル $\mathfrak{m} = (\pi, T)$ (π は $\mathcal{O}$ の素元) の $\mathfrak{m}$ 進位相で完備であり, $\omega_n \in \mathfrak{m}^{n+1}$ であることから, $\Lambda \to \varprojlim{}_n \Lambda/(\omega_n)$ も環同型である. これらをつなぎ合わせると, $\mathcal{O}$ 上の環同型

$$\tau : R \xrightarrow{\sim} \Lambda \tag{1.7}$$

を得る．$\tau(\gamma)=1+T$ である．更に R に逆極限の位相 (R_n には $R_n\cong\mathcal{O}^{\oplus p^n}$ により右辺の自然な位相を入れる), Λ に $\mathfrak{m}$ 進位相を入れるとき, τ は位相環としての同型となる．τ は $\tau(\gamma)=1+T$ なる $\mathcal{O}$ 上の連続環準同型として特徴付けられる．

次に, $h(T)\in\Lambda$ に $T=(1+q_0)^{1-k}-1$ を代入することに対応する, R の元への操作について説明する．$k\in\mathbf{Z}$ に対し,

$$\Gamma_n\to(\mathcal{O}/q_n\mathcal{O})^{\times}\ \ (\gamma_n(a)\mapsto<a>^{1-k}\mod q_n\mathcal{O})$$

は (1.5) より well-defined な群準同型となる．これより誘導される環準同型を

$$\varphi_{k-1,n}:R_n\to\mathcal{O}/q_n\mathcal{O}\tag{1.8}$$

で表す．これは更に

$$\varphi_{k-1}=\varprojlim{}_n\varphi_{k-1,n}:R=\varprojlim{}_nR_n\to\varprojlim{}_n\mathcal{O}/q_n\mathcal{O}\cong\mathcal{O}$$

なる連続環準同型を導くことが容易に分かる．$\xi=(\xi_n)_{n\geq0}\in R$ $(\xi_n\in R_n)$ に対し

$$\varphi_{k-1}(\xi)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{\varphi_{k-1,n}(\xi_n)}\tag{1.9}$$

である ($\widetilde{\varphi_{k-1,n}(\xi_n)}$ は $\varphi_{k-1,n}(\xi_n)$ の $\mathcal{O}$ への勝手な持ち上げとする)． また $\varphi_{k-1}(\gamma(a))=<a>^{1-k}$, $\varphi_{k-1}(\gamma)=(1+q_0)^{1-k}$ である．

補題 *1.2.1.* $h(T)\in\Lambda$ とし, $\xi=\tau^{-1}(h(T))\in R$ とする (τ は(1.7) の同型)．このとき $h((1+q_0)^{1-k}-1)=\varphi_{k-1}(\xi)$.

証明. $h(T)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nT^n$ とする． $h^{(M)}(T)=\displaystyle\sum_{n=0}^{M}a_nT^n$ とおくと Λ の位相で $h(T)=\displaystyle\lim_{M\to\infty}h^{(M)}(T)$ である．$\xi^{(M)}=\tau^{-1}(h^{(M)}(T))$ とおけば, τ^{-1} は $\mathcal{O}$ 上の環準同型なので $\xi^{(M)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{M}a_n(\gamma-1)^n$. τ^{-1} の連続性より $\xi=\displaystyle\lim_{M\to\infty}\xi^{(M)}$ なので, φ_{k-1} の連続性から $\varphi_{k-1}(\xi)=\displaystyle\lim_{M\to\infty}\varphi_{k-1}(\xi^{(M)})$ である．φ_{k-1} は $\mathcal{O}$ 上の環準同型だから $\varphi_{k-1}(\xi^{(M)})=\varphi_{k-1}(\displaystyle\sum_{n=0}^{M}a_n(\gamma-1)^n)=\displaystyle\sum_{n=0}^{M}a_n((1+q_0)^{1-k}-1)^n$ であり, 従って $\varphi_{k-1}(\xi)=\displaystyle\lim_{M\to\infty}\sum_{n=0}^{M}a_n((1+q_0)^{1-k}-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n((1+q_0)^{1-k}-1)^n=h((1+q_0)^{1-k}-1))$ $(\in\mathcal{O})$. □

1.3 $f(T;\chi,c)$, $u(T;\chi,c)$ の構成

本節では $f(T;\chi,c)$, $u(T;\chi,c)$ を構成し, (1.3) を満たすことを示す.

以下, χ は奇指標としその導手を $N=m_0p^e$ とする. $q_n=m_0p^{n+1}$ とおき, G_n, Γ_n 等は §1.2 のとおりとする. $K=\mathbf{Q}_p(\chi)\subset\overline{\mathbf{Q}_p}$ を $\mathbf{Q}_p$ に χ の値を全て付加した体とし, $\mathcal{O}=\mathbf{Z}_p[\chi]$ をその整数環とする.

$n\geq e-1$ に対し,

$$\xi_n=\xi_n(\chi)=-\frac{1}{q_n}\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}a\chi(a)^{-1}\gamma_n(a)^{-1}\in K[\Gamma_n] \tag{1.10}$$

とおく. $\xi_n(\chi)$ はいわゆる Stickelberger 元 ($\in\mathbf{Q}[G_n]$, cf. [Wa2] §6.2) からつくられたものである. Stickelberger 元は本論文で突然出てきたものではなく, Iwasawa は先行論文 [Iw1], [Iw3] でこれについて研究している.

(1.6) と同様に $m\geq n$ に対し, $\pi_{m,n}|_{\Gamma_m}:\Gamma_m\to\Gamma_n$ が誘導する環準同型を

$$\pi_{m,n}:K[\Gamma_m]\to K[\Gamma_n]$$

で表すことにする. もちろん $R_n=\mathcal{O}[\Gamma_n]\subset K[\Gamma_n]$ で, $\pi_{m,n}$ を R_m に制限したものは (1.6) に一致する. 次の事実には χ が奇指標であることが必要である.

補題 *1.3.1.* $m\geq n\geq e-1$ に対し, $\pi_{m,n}(\xi_m)=\xi_n$.

証明. 次のように変形する.

$$\begin{aligned}
\pi_{m,n}(\xi_m)&=-\frac{1}{q_m}\sum_{\substack{0\leq a<q_m\\(a,q_0)=1}}a\chi(a)^{-1}\gamma_n(a)^{-1}\\
&=-\frac{1}{q_m}\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}\sum_{j=0}^{p^{m-n}-1}(a+q_nj)\chi(a+q_nj)^{-1}\gamma_n(a+q_nj)^{-1}\\
&=-\frac{1}{q_m}\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}\sum_{j=0}^{p^{m-n}-1}(a+q_nj)\chi(a)^{-1}\gamma_n(a)^{-1}\\
&=-\frac{1}{q_n}\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}a\chi(a)^{-1}\gamma_n(a)^{-1}-\left(\frac{1}{p^{m-n}}\sum_{j=0}^{p^{m-n}-1}j\right)\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}\chi(a)^{-1}\gamma_n(a)^{-1}.
\end{aligned}$$

ここで $\chi(-1)=-1$, $\gamma_n(-a)=\gamma_n(a)$ より $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}\chi(a)^{-1}\gamma_n(a)^{-1}=0$ なので結論を得る. □

$(c, q_0) = 1$ かつ $c \neq \pm 1$ なる整数 c を勝手にとる. $n \geq e$ に対し

$$\eta_n = \eta_n(\chi, c) = (1 - c\chi(c)^{-1}\gamma_n(c)^{-1})\xi_n \quad \in K[\Gamma_n]$$

とおく.

補題 *1.3.2.* $\eta_n \in R_n = \mathcal{O}[\Gamma_n]$ で, $m \geq n \geq e-1$ に対し, $\pi_{m,n}(\eta_m) = \eta_n$.

証明. $\pi_{m,n}(\eta_m) = \eta_n$ は補題 1.3.1 と $\pi_{m,n} : K[\Gamma_m] \to K[\Gamma_n]$ が環準同型であることから明らか. $a \in \mathbf{Z}$, $(a, q_0) = 1$ に対し, $b_n(a), s_n(a) \in \mathbf{Z}$ を

$$\begin{cases} ac \equiv b_n(a) \pmod{q_n} \\ 0 \leq b_n(a) < q_n \\ b_n(a) - ac = s_n(a)q_n \end{cases} \tag{1.11}$$

により唯一つ定まる数とする. a が $0 \leq a < q_n$, $(a, q_0) = 1$ を全て動くとき $b_n(a)$ も同じ範囲を全て動くことに注意する.

$$\begin{aligned} \eta_n &= -\frac{1}{q_n} \sum_{\substack{0 \leq a < q_n \\ (a,q_0)=1}} (a\chi(a)^{-1}\gamma_n(a)^{-1} - ac\chi(ac)^{-1}\gamma_n(ac)^{-1}) \\ &= -\frac{1}{q_n} \sum_{\substack{0 \leq a < q_n \\ (a,q_0)=1}} (a\chi(a)^{-1}\gamma_n(a)^{-1} - b_n(a)\chi(b_n(a))^{-1}\gamma_n(b_n(a))^{-1}) \\ &\quad - \chi(c)^{-1}\gamma_n(c)^{-1} \sum_{\substack{0 \leq a < q_n \\ (a,q_0)=1}} s_n(a)\chi(a)^{-1}\gamma_n(a)^{-1} \end{aligned}$$

最後の式の第一項は上で述べたことにより 0 となるので,

$$\eta_n = -\chi(c)^{-1}\gamma_n(c)^{-1} \sum_{\substack{0 \leq a < q_n \\ (a,q_0)=1}} s_n(a)\chi(a)^{-1}\gamma_n(a)^{-1} \in \mathcal{O}[\Gamma_n] \tag{1.12}$$

となる. □

上の補題により,

$$\eta = \eta(\chi, c) = (\eta_n)_{n \geq 0} \ \in R$$

(但し $n < e-1$ に対しては $\eta_n = \pi_{e-1,n}(\eta_{e-1})$ としておく) なので, (1.7) の同型 τ を用いて

$$f(T; \chi, c) = \tau(\eta(\chi, c)) \in \Lambda$$

と定義する.

定理 *1.3.3.* $k \geq 1$ に対し,

$$f((1+q_0)^{1-k}-1;\chi,c) = \\ (1-\chi^{-1}\omega^{1-k}(c)c^k)(1-\chi^{-1}\omega^{1-k}(p)p^{k-1})L(1-k,\chi^{-1}\omega^{1-k})$$

上式は次節で証明する. 次に (1.7) の同型 τ を用いて

$$u(T;\chi,c) = \tau(1-c\chi(c)^{-1}\gamma(c)^{-1}) \ \in \Lambda$$

とおく. 但し $\gamma(c) = (\gamma_n(c))_{n\geq 1} \in \Gamma$ である.

$$\begin{aligned} u((1+q_0)^{1-k}-1;\chi,c) &= \varphi_{k-1}(1-c\chi(c)^{-1}\gamma(c)^{-1}) \\ &= 1-c\chi(c)^{-1} <c>^{k-1} = 1-\chi^{-1}\omega^{1-k}(c)c^k \end{aligned}$$

である ($<c> = c\cdot\omega(c)^{-1}$ より). $c \in \mathbf{Z}$, $(c,q_0)=1$ かつ $c \neq \pm 1$ よりこの数は 0 でないので 定理 1.3.3 と合わせて次式 (所期の (1.3)) を得る:

$$\frac{f((1+q_0)^{1-k}-1;\chi,c)}{u((1+q_0)^{1-k}-1;\chi,c)} = (1-\chi^{-1}\omega^{1-k}(p)p^{k-1})L(1-k,\chi^{-1}\omega^{1-k}).$$

$u(T;\chi,c)$ についてもう少し見る. $1+p\mathbf{Z}_p$ において $<c> = (1+q_0)^d$ となる $d \in \mathbf{Z}_p$ が唯一つ存在する. よって

$$u(T;\chi,c) = 1-c\chi(c)^{-1}(1+T)^{-d}. \tag{1.13}$$

(注: $(1+T)^{-d} = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{-d}{m}T^m$, 但し $\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$, である.) (1.13) より $s \in \mathbf{Z}_p$ に対し $u((1+q_0)^s-1;\chi,c) = 1-\chi^{-1}\omega(c) <c>^{1-s}$ であり, $<c> \in 1+p\mathbf{Z}_p$, $<c> \neq 1$ であることから $u((1+q_0)^s-1;\chi,c) = 0$ が成り立つのは $\chi^{-1}\omega(c) = 1$ かつ $1-s=0$ のときのみである. 従って $\dfrac{f((1+q_0)^s-1;\chi,c)}{u((1+q_0)^s-1;\chi,c)}$ は $s \in \mathbf{Z}_p$, $s \neq 1$ の範囲で定義される. 特に $\chi \neq \omega$ の場合は, $\chi^{-1}\omega(c) \neq 1$ となる c が存在するので, このような c をとることで全ての $s \in \mathbf{Z}_p$ で定義されることになる.

最後に

$$g(T;\chi) = \frac{f(T;\chi,c)}{u(T;\chi,c)} \tag{1.14}$$

とおく. $u(T;\chi,c) \neq 0$ より $g(T;\chi) \in Q(\Lambda)$ ($Q(\Lambda)$ は Λ の商体) である. $g(T,\chi)$ は $Q(\Lambda)$ の元として c によらないことが次のように分かる. Weierstrass の準備定理 (cf. [Wa2] Theorem 7.3, [SU] 命題 10.19, [SS] も参照) により, Λ の元

$h(T)\neq 0$ に対し $h(\alpha)=0$ となる $\alpha\in p\mathbf{Z}_p$ は高々有限個である．よって 2 つの Λ の元について無限個の $\alpha\in p\mathbf{Z}_p$ を代入した値が一致するなら，その 2 つは等しい．このことから全く同様のことが 2 つの $Q(\Lambda)$ の元に対してもいえる．任意の $k\geq 1$ に対して $g((1+q_0)^{1-k}-1;\chi)$ は c によらない数であるので，上の議論により $g(T,\chi)$ は c によらない．

1.4 定理 1.3.3 の証明

定理 1.3.3 を示す．$k\geq 1$ をひとつ固定し，

$$\chi_1=\chi^{-1}\omega^{1-k}$$

とおく．次の計算がこの話の最もデリケートな部分である．

補題 *1.4.1.* $\varphi_{k-1,n}(\eta_n)\equiv -(1-\chi_1(c)c^k)\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{q_n}\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}\chi_1(a)a^k \pmod{\frac{q_n}{k}\mathcal{O}}$

証明. $b_n(a),s_n(a)$ を(1.11) で定めたものとすると，(1.12) と $\varphi_{k-1,n}$ の定義から

$$\begin{aligned}\varphi_{k-1,n}(\eta_n)\equiv&-\chi(c)^{-1}<c>^{k-1}\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}s_n(a)\chi(a)^{-1}<a>^{k-1}\\ =&-\chi_1(c)c^{k-1}\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}s_n(a)\chi_1(a)a^{k-1}\pmod{q_n\mathcal{O}}\end{aligned}$$

となる $(<a>=a\cdot\omega(a)^{-1}$ より)．更に

$$b_n(a)^k=(ac+s_n(a)q_n)^k\equiv(ac)^k+k\cdot s_n(a)\cdot(ac)^{k-1}q_n \pmod{q_n^2}$$

より

$$s_n(a)(ac)^{k-1}\equiv\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{q_n}(b_n(a)^k-(ac)^k)\pmod{\frac{q_n}{k}\mathbf{Z}_p}$$

であるので，

$$\begin{aligned}\varphi_{k-1,n}(\eta_n)\equiv&-\chi_1(c)\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{q_n}(\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}\chi_1(a)b_n(a)^k-\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}\chi_1(a)(ac)^k)\\ =&-\chi_1(c)\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{q_n}(\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}\chi_1(c)^{-1}\chi_1(b_n(a))b_n(a)^k-\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}\chi_1(a)(ac)^k)\\ =&-(1-\chi_1(c)c^k)\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{q_n}\sum_{\substack{0\leq a<q_n\\(a,q_0)=1}}\chi_1(a)a^k\pmod{\frac{q_n}{k}\mathcal{O}}\end{aligned}$$

となる． □

これと補題 1.2.1, 及び(1.9) より,

$$f((1+q_0)^{1-k}-1;\chi,c) = -(1-\chi_1(c)c^k)\frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q_n}\sum_{\substack{0\le a<q_n\\(a,q_0)=1}}\chi_1(a)a^k\right) \tag{1.15}$$

を得る. さて, ここで一般 Bernoulli 数を導入する. 導手 $N = m_0 p^e$ の Dirichlet 指標 ρ に対し,

$$F_\rho(t) = \sum_{a=0}^{N}\frac{\rho(a)te^{at}}{e^{Nt}-1}$$

とおき, その $t=0$ での Maclaurin 展開を $F_\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,\rho}\frac{t^k}{k!}$ とおく. このとき $B_{k,\rho}\in\mathbf{Q}(\rho)$ である. 次はよく知られている.

定理 *1.4.2* (cf. [Le1], [Iw6] §2 Theorem 1, [Wa2] Theorem 4.2). $k\ge 1$ に対し,

$$L(1-k,\rho) = -\frac{B_{k,\rho}}{k}.$$

そして次の定理が証明の核心である. 証明は §1.5 で与える.

定理 *1.4.3* (Leopoldt[Le1], cf. [Iw6] §2 Lemma 1). $\mathbf{Q}_p(\rho)$ において

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}\sum_{a=0}^{q_n}\rho(a)a^k = B_{k,\rho}.$$

但しここでも (1.1) で定めた ι_∞, ι_p によって $\mathbf{Q}(\rho)\hookrightarrow\mathbf{Q}_p(\rho)$ としている.

系 *1.4.4.* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}\sum_{\substack{0\le a<q_n\\(a,q_0)=1}}\rho(a)a^k = (1-\rho(p)p^{k-1})B_{k,\rho}.$

証明. $\displaystyle\frac{1}{q_n}\sum_{\substack{0\le a<q_n\\(a,q_0)=1}}\rho(a)a^k = \frac{1}{q_n}(\sum_{a=0}^{q_n}\rho(a)a^k - \sum_{a=0}^{q_{n-1}}\rho(pa)(pa)^k) = \frac{1}{q_n}\sum_{a=0}^{q_n}\rho(a)a^k - \rho(p)p^{k-1}\frac{1}{q_{n-1}}\sum_{a=0}^{q_{n-1}}\rho(a)a^k$ である ($(a,m_0)\ne 1$ ならば $\rho(a)=0$ であることに注意). これを $n\to\infty$ とすることで定理 1.4.3 より結論を得る. □

これと定理 1.4.2, (1.15) より

$$f((1+q_0)^{1-k}-1;\chi,c) = -(1-\chi_1(c)c^k)(1-\chi_1(p)p^{k-1})L(1-k,\chi_1)$$

となり定理 1.3.3 が示された.

1.5 Leopoldt の定理の証明

定理 1.4.3 の証明を与える.

$$F_\rho(t,x) = F_\rho(t)e^{xt} = \sum_{a=0}^{N} \frac{\rho(a)te^{(a+x)t}}{e^{Nt}-1}$$

とおき, t に関する Maclaurin 展開を $F_\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,\rho}(x)\frac{t^k}{k!}$ とおく. このとき

$$B_{k+1,\rho}(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} B_{j,\rho}x^{k+1-j} \in \mathbf{Q}(\rho)[x] \tag{1.16}$$

であることが, $F_\rho(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{j,\rho}\frac{t^j}{j!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} x^m \frac{t^m}{m!}$ よりわかる.

$$F_\rho(t,x) - F_\rho(t,x-N) = \sum_{a=0}^{N} \rho(a)te^{(a+x-N)t} = \sum_{a=0}^{N} \rho(a)t \sum_{m=0}^{\infty} (a+x-N)^m \frac{t^m}{m!}$$

より t^{k+1} の項を見比べて

$$B_{k+1,\rho}(x) - B_{k+1,\rho}(x-N) = (k+1)\sum_{a=1}^{N} \rho(a)(a+x-N)^k$$

を得る. これから

$$\frac{1}{k+1}(B_{k+1,\rho}(mN) - B_{k+1,\rho}(0)) = \sum_{a=1}^{mN} \rho(a)a^k. \tag{1.17}$$

また, (1.16) より $k \geq 1$ に対し,

$$B_{k+1,\rho}(x) - B_{k+1,\rho}(0) = (k+1)B_{k,\rho}x + x^2 \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} B_{j,\rho}x^{k-1-j} \right)$$

であるから,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^nN}(B_{k+1,\rho}(p^nN) - B_{k+1,\rho}(0)) = (k+1)B_{k,\rho}.$$

(1.17) とあわせ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^nN} \sum_{a=1}^{p^nN} \rho(a)a^k = B_{k,\rho}$ を得る. これで定理は証明された.

注意 *1.5.1.* Kubota-Leopoldt による定理 1.1.1 のオリジナルの証明 ([K-L]) についてここで述べておく.

$$L_p(s,\chi^{-1}\omega)=\frac{1}{s-1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}\sum_{\substack{0\le a<q_n\\(a,q_0)=1}}\chi^{-1}\omega(a)\exp((1-s)\log_p<a>)$$

とおくと, 右辺の極限は $\{s\in\mathbf{C}_p \mid |s|_p<p^{p-2/p-1}\}$ において収束して連続（解析的）関数となることが示される. 但し $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\log_p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$. 更に (1.2) を満たすことが系 1.4.4 から分かる.

1.6 第一種と第二種の指標

導手が p で高々一回割れる Dirichlet 指標を第一種 (first kind) の指標, 導手が p べきで位数が p べきの Dirichlet 指標を第二種 (second kind) の指標とよぶ. これは恐らくこの [Iw5] で導入された概念である. 一般の指標は, 次のようにこの二種類の指標の積に一意的に分解される. 導手 $N=m_0p^e$ ($(m_0,p)=1$, $e\ge 2$) の指標 $\chi:(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times\to\mathbf{C}^\times$ に対し, $G_{e-1}=(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ の (1.4) の直積分解

$$(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times\cong\Delta_{e-1}\times\Gamma_{e-1},\ \ \sigma_{e-1}(a)\mapsto(\delta_{e-1}(a),\gamma_{e-1}(a))$$

を用いて λ, μ を

$$\lambda(a)=\chi(\delta_{e-1}(a)),\ \mu(a)=\chi(\gamma_{e-1}(a))\quad(a\in\mathbf{Z},\ (a,q_0)=1)$$

と定義すると, これらも $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times\to\mathbf{C}^\times$ なる Dirichlet 指標となる. λ は $G_0=(\mathbf{Z}/m_0p\mathbf{Z})^\times$ を経由する導手 m_0 または m_0p の第一種の指標, μ は $(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})^\times$ を経由する導手 p^e で位数 p べきの第二種の指標であり,

$$\chi=\lambda\mu \tag{1.18}$$

を満たす. このような χ の分解は上の条件で一意的である.

以下, 上の分解 (1.18) に対し, §1.2 の (1.14) で定義した, p 進 L 関数を与える $Q(\Lambda)$ の元 $g(T,\chi)$ と $g(T,\lambda)$ を比較する. $\zeta=\mu(1+q_0)(=\chi(1+q_0))$ とおく. ζ は 1 の p べき乗根である. $k\in\mathbf{Z}$ に対し, (1.8) に類似の環準同型 $\psi_{k-1,n}:R_n\to\mathcal{O}/q_n\mathcal{O}$ を $\gamma_n(a)\mapsto\mu(a)<a>^{1-k}\mod q_n\mathcal{O}$ により定める. これは well-defined であり, さらに φ_{k-1} と同様に連続環準同型

$$\psi_{k-1}=\varprojlim{}_n\psi_{k-1,n}:R=\varprojlim{}_nR_n\to\varprojlim{}_n\mathcal{O}/q_n\mathcal{O}\cong\mathcal{O}$$

を導く．このとき, 補題 1.2.1 と同様に $h(T) \in \Lambda$, $\xi = \tau^{-1}(h(T)) \in R$ に対し, $\psi_{k-1}(\xi) = h(\psi_{k-1}(\gamma) - 1) = h(\mu(\gamma)(1+q_0)^{1-k} - 1) = h(\zeta(1+q_0)^{1-k} - 1)$ が成り立つ．ここで (1.12) より

$$\begin{aligned} &\psi_{k-1,n}(\eta_n(\lambda,c)) \\ \equiv &-\lambda(c)^{-1}\mu(c)^{-1} < c >^{k-1} \sum_{\substack{0\le a<q_n \\ (a,q_0)=1}} s_n(a)\lambda(a)^{-1}\mu(a)^{-1} < a >^{k-1} \\ \equiv &\varphi_{k-1,n}(\eta_n(\chi,c)) \pmod{q_n\mathcal{O}}. \end{aligned}$$

よって, $\psi_{k-1}(\eta(\lambda,c)) = \varphi_{k-1}(\eta(\chi,c))$, 従って $f(\zeta(1+q_0)^{1-k}-1;\lambda,c) = f((1+q_0)^{1-k}-1;\chi,c)$ が成り立つ．つまり $f(\zeta(1+T)-1;\lambda,c)$ と $f(T;\chi,c)$ は無限個の $p\mathbf{Z}_p$ の元 ($(1+q_0)^{1-k}-1$ たち) を代入した値が一致するので, §1.3 の最後に述べたことにより, Λ の元として

$$f(\zeta(1+T)-1;\lambda,c) = f(T;\chi,c)$$

が成り立つ．また, (1.13) より

$$\begin{aligned} u(\zeta(1+T)-1;\lambda,c) &= 1 - c\lambda(c)^{-1}\zeta^{-d}(1+T)^{-d} \\ &= 1 - c\lambda(c)^{-1}\mu((1+q_0)^d)^{-1}(1+T)^{-d} = 1 - c\lambda(c)^{-1}\mu(c)^{-1}(1+T)^{-d} \\ &= u(T;\chi,c) \end{aligned} \tag{1.19}$$

なので, 次が成り立つ．

定理 *1.6.1.* $\chi = \lambda\mu$ を (1.18) の χ の第一種と第二種の指標への分解とすると,

$$g(T;\chi) = g(\zeta(1+T)-1;\lambda).$$

最後に $\lambda \ne \omega$ の場合について注意しておく． このときは $\lambda^{-1}\omega(c) \not\equiv 1 \pmod{\pi\mathcal{O}}$ となる c が存在する．この c に対し, $u(0;\lambda,c) = 1 - \lambda^{-1}(c)c \in \mathcal{O}^\times$ であることから $u(T;\lambda,c) \in \Lambda^\times$ となる．従って $g(T;\lambda) \in \Lambda$ である．

1.7 円分体の数論との関係

この節は [Iw3] の結果の要約である．奇素数 p に対し $G_n = (\mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z})^\times$ とおき, (1.4) によって $G_n \xrightarrow{\sim} \Delta_n \times \Gamma_n$, $\sigma_n(a) \mapsto (\delta_n(a), \gamma_n(a))$ と分解する (今の場合 $m_0 = 1$)．$0 \le i \le p-2$ に対し

$$\varepsilon_n^{(i)} = \frac{1}{p-1}\sum_{a=0}^{p-1}\omega(a)^{-i}\delta_n(a) \ \in \mathbf{Z}_p[\Delta_n] \ (\subset \mathbf{Z}_p[G_n])$$

とおく. また,

$$\xi_n = -\frac{1}{q_n} \sum_{\substack{0 \le a < q_n \\ (a, q_0)=1}} a\sigma_n(a)^{-1} \ \in \mathbf{Q}[G_n]$$

を Stickelberger 元という. $\varepsilon_n^{(i)}\xi_n = \varepsilon_n^{(i)}\xi_n(\omega^i)$ が成り立つことが分かる. ここで右辺の $\xi_n(\omega^i)$ は, (導手 1 又は p の指標) $\chi = \omega^i$ に対し (1.10) で定義される $\mathbf{Q}_p[\Gamma_n]$ の元である. $i \neq 1$ ならば $\xi_n(\omega^i) \in R_n = \mathbf{Z}_p[\Gamma_n]$ $(\subset \mathbf{Z}_p[G_n])$ である ($\mathcal{O} = \mathbf{Z}_p[\omega^i] = \mathbf{Z}_p$ であることに注意).

$F_n = \mathbf{Q}(\zeta_{p^{n+1}})$ とおく. よく知られているように標準的に $\mathrm{Gal}(F_n/\mathbf{Q}) \cong G_n$ である. 以下両者をこの同型で同一視する. A_n を F_n のイデアル類群の p-part $A_n = \mathrm{Cl}(F_n)[p^\infty]$ とする. A_n には $\mathrm{Gal}(F_n/\mathbf{Q})$ が作用しているので $\mathbf{Z}_p[G_n]$ 加群となる.

$$A_n^{(i)} = \varepsilon_n^{(i)} A_n$$

とおく. $A_n^{(i)}$ は $R_n = \mathbf{Z}_p[\Gamma_n]$ 加群であり, $A_n = \oplus_{i=0}^{p-2} A_n^{(i)}$ である. $m \geq n$ に対し, 自然な写像 $A_n^{(i)} \to A_m^{(i)}$ があるが, これによる順極限を

$$A^{(i)} = \varinjlim{}_n A_n^{(i)}$$

とおく. $A^{(i)}$ は $R = \varprojlim{}_n R_n$ が連続に作用する p-torsion の離散群である.

$$X^{(i)} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(A^{(i)}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$$

を $A^{(i)}$ の Pontrjagin 双対とする. $\xi \in R$ が $x \in X^{(i)}$ に $(\xi \cdot x)(c) = x(\xi \cdot c)$ $(c \in A^{(i)})$ と作用することにより $X^{(i)}$ は compact な R 加群となる. そこで (1.7) の同型 τ を通じて $X^{(i)}$ を Λ 加群とする.

定理 *1.7.1.* $F_0^+ = \mathbf{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$ を F_0 の最大総実部分体とし, A_0^+ を F_0^+ のイデアル類群の p-part とする. $A_0^+ = \{0\}$ と仮定する. このとき次の Λ 加群としての同型が成り立つ.

$$X^{(i)} \cong \begin{cases} 0 & (i = 1 \text{ 又は } i \text{ が偶数}) \\ \Lambda/(g(T;\omega^i)) & (i \neq 1 \text{ で } i \text{ が奇数}) \end{cases}$$

但し $g(T;\omega^i)$ は(1.14) で定義されたもの. §1.7 の最後でみたように $i \neq 1$ で i が奇数ならば $g(T;\omega^i) \in \Lambda$ である.

これがいわゆる岩澤主予想のはじまりで, その根拠となった結果である. Iwasawa は本論文で「この結果は代数曲線のゼータ関数に対する A. Weil のよく知られた定理の類似とみなすことが出来る」と述べている. (詳しくは [Iw2], [Iw4] を見よ. [SS] も参照のこと.)

証明には F_n の p 上の素点が唯一つであること, $A_0^+ = \{0\}$ ならば $A_n^{(i)}$ は R_n 上 cyclic であること (鏡映原理), $\xi_n(\omega^i)A_n^{(i)} = \{0\}$ (Stickelberger の定理), 解析的類数公式などが必要である. [Wa2] Chap. 13 も参照のこと. また, $A_0^+ = \{0\}$ は一般に Vandiver 予想とよばれている.

1.8 p 進 L 関数の様々な構成法と一般化

前節までが [Iw5] の内容の紹介であった. この節では, この論文の前後で発見された (Kubota-Leopoldt の) p 進 L 関数の様々な構成法について述べ, p 進 L 関数の一般化のいくつかについて触れる.

まず p 進 L 関数の構成については, 次が挙げられる. [Mo], [SU], [Wa2] も参照のこと.

(1) Kubota-Leopoldt によるオリジナルの方法 ([K-L]).

(2) Stickelberger 元を用いる方法 (Iwasawa [Iw5], 本稿で紹介, [Wa2] Chap. 7 も参照.)

(3) 円単数と Colman べき級数の理論を用いる方法 (Iwasawa [Iw3], Coleman [Co]. [Wa2] Chap. 13 も参照).

(4) Amice-Fresnel の方法 ([A-F]).

(5) p 進 modular form の理論と Eisenstein 級数を用いる方法 (Serre [Se]. [Katz1] も参照).

(6) Γ-transform を用いる方法 (Leopoldt [Le2]. [Wa2] Chap. 12 も参照).

(7) Washington の方法 ([Wa1]. [Wa2] Chap. 5 も参照).

次に, p 進 L 関数の様々な方向への一般化のうちのいくつかを紹介する. それらの構成法には, 上の構成法 (1)–(7) のいずれかがそれぞれの特性に応じて応用されている.

・総実体の p 進 L 関数

代数体 F 上の類指標 (合同類群の指標) χ に付随して Hecke L 関数 $L(s,\chi)$ が定義される. F が総実体で, $\mathrm{Ker}(\chi)$ に対応する体が CM 体となる奇指標 χ に対し, Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数に類似した, $L(1-k,\chi^{-1}\omega^{1-k})$ $(k \geq 1)$ を補間する関数 $L_p(s,\chi^{-1}\omega)$ が定義される. 構成法は, (6) の方法で Barsky ([Ba]), Cassou-Nogues ([Ca]), (5) の方法で Deligne-Ribet ([D-R]).

・CM 楕円曲線の p 進 L 関数

E を $\mathbf{Q}$ 上定義された虚数乗法をもつ楕円曲線とする. $E/\mathbf{Q}$ の Hasse-Weil L 関数 $L(s,E)$ はある虚二次体上の量指標 ψ の Hecke L 関数 $L(s,\psi)$ に一致す

る．このとき p 進 L 関数 $L_p(s,E)$ が $L(k,\overline{\psi}^k)$ $(k \geq 1)$ を補間する関数として定義される．構成法は, (3) の方法で Coates-Wiles ([C-W]), (5) の方法で Katz ([Katz2]).

・modular form の p 進 L 関数

f を重さ k の Hecke eigen cusp new form とする．Dirichlet 指標 χ に対し, L 関数 $L(s,f,\chi)$ が定義される．f と χ に付随して, $L(j,f,\chi\rho)$ $(1 \leq j \leq k-1$, ρ は第二種の指標) を補間する p 進 L 関数が定義される．構成法は, (2) の方法で Mazur-Swinnerton-Dyer [M-S], Manin [Ma], Mazur-Tate-Teitelbaum [M-T-T], (3) の方法で Kato [Kato].

この他にも anticyclotomic 拡大の p 進 L 関数, deformation の p 進 L 関数, 多変数 p 進 L 関数, 非可換 p 進 L 関数など多様なものがある．

参考文献

[A-F] Y. Amice and J. Fresnel: *Fonctions zeta p-adiques des corps de nombres abeliens reels*, Acta Arith. 20 (1972), 353–384.

[Ba] D. Barsky: *Fonctions zeta p-adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement reels*, Groupe d'Etude d'Analyse Ultrametrique (5e annee: 1977/78), Exp. No. 16, 23 pp., Secretariat Math., Paris, 1978.

[Ca] P. Cassou-Nogues: *Valeurs aux entiers negatifs des fonctions zeta et fonctions zeta p-adiques*, Invent. Math. 51 (1979), 29–59.

[C-W] J. Coates and A. Wiles: *On p-adic L-functions and elliptic units*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 26 (1978), 1–25.

[Co] R. Coleman: *Division values in local fields*, Invent. Math. 89 (1979), 91–116.

[D-R] P. Deligne and K. Ribet: *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math. 59 (1980), 227–286.

[Iw1] K. Iwasawa: *A class number formula for cyclotomic fields*, Ann. of Math. (2) 76 (1962), 171–179 (全集 [Iw7] の論文 [39]).

[Iw2] K. Iwasawa: 代数体と函数体のある類似について, 数学 15 (1963), 65–67 (全集 [Iw7] の [40]).

[Iw3] K. Iwasawa: *On some modules in the theory of cyclotomic fields*, J. Math. Soc. Japan 16 (1964), 42–82 (全集 [Iw7] の論文 [41]).

[Iw4] K. Iwasawa: *Analogies between number fields and function fields*, in Proc. Annual Sci. Conf. vol. 2, Yeshiva Univ. (1969), 203–208 (全集 [Iw7] の [47]).

[Iw5] K. Iwasawa: *On p-adic L-functions*, Ann. of Math. (2) 89 (1969), 198–205 (全集 [Iw7] の論文 [48]).

[Iw6] K. Iwasawa: *Lectures on p-adic L-functions*, Annals of Mathematics Studies, No. 74. Princeton University Press 1972.

[Iw7] K. Iwasawa: *Collected papers Vol. I, II*, Springer-Verlag, Tokyo, 2001.

[Kato] K. Kato: *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, Asterisque No. 295 (2004), 117–290.

[Katz1] N. M. Katz: *p-adic L-functions via moduli of elliptic curves*, Proc. Sympos. Pure Math. 29 (1975), pp. 479–506.

[Katz2] N. M. Katz: *The Eisenstein measure and p-adic interpolation*, Amer. J. Math. 99 (1977), 238–311.

[K-L] T. Kubota and H.-W. Leopoldt: *Eine p-adische Theorie der Zetawerte. I. Einfuhrung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen*, J. Reine Angew. Math. 214/215 (1964), 328–339.

[Le1] H.-W. Leopoldt: *Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 22 (1958), 131–140.

[Le2] H.-W. Leopoldt: *Eine p-adische Theorie der Zetawerte. II Die p-adische Γ-Transformation*, J. Reine Angew. Math. 274/275 (1975), 224–239.

[Ma] J. I. Manin: *Periods of cusp forms and p-adic Hecke series* (English translation), Math. USSR Sbornik 21 (1973), 371–393.

[Mo] 森田康夫: p 進 L 関数入門 (I): Kummer の合同式と Kubota-Leopoldt の仕事, 数理解析研究所講究録 411 (1981), 2–9.

[M-S] B. Mazur and P. Swinnerton-Dyer: *Arithmetic of Weil curves*, Invent. Math. 25 (1974), 1–61.

[M-T-T] B. Mazur, J. Tate and J. Teitelbaum: *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. 84 (1986), 1–48.

[Se] J.-P. Serre: *Formes modulaires et fonctions zeta p-adiques*, Lecture Notes in Math. 350 (1973), 191–268.

[SS] 2003 年度整数論サマースクール "岩澤理論" 報告集, (2004).

[SU] 黒川信重, 栗原将人, 斎藤毅: 数論 II, 岩波書店 (2004).

[Wa1] L. C. Washington: *A note on p-adic L-functions*, J. Number Theory 8 (1976), 245–250.

[Wa2] L. C. Washignton: *Introduction to Cyclotomic Fields* (2nd ed.), G.T.M. no. 83, Springer, New York (1997).