楕円曲線の p 進 L 関数

八森 祥隆 (学習院大理学部 学振特別研究員)

1. 序

楕円曲線に付随する 1 変数 の p 進 L 関数と呼ばれるものは, 次にあげるようにいろいろある.

(i) $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線に対し，"cyclotomic" な p 進 L 関数 (Mazur-Swinnerton Dyer, Mazur-Tate-Teitelbaum).

(ii) $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線と，虚二次体に対し，"anti-cyclotomic" な p 進 L 関数 (Bertolini-Darmon).

(iii) 虚数乗法 (CM) をもつ楕円曲線に対し，"$\mathfrak{p}$-分岐" な p 進 L 関数 (Coates-Wiles).

(iv) rigid analytic な p 進 L 関数 (Schneider).

これらはそれぞれ別のものであるが, 共通していることは,

$$L_p(s) = F(u^{s-1} - 1) \quad (s \in \mathbb{C}_p)$$

という形をしていることである. ここで $F(T)$ は 巾級数環 $\mathbb{Q}_p[[T]]$ の元で, u は $1 + p\mathbb{Z}_p$ の生成元である. p 進 L 関数と呼ばれるゆえんは, $F(T)$ の無限個の特殊値 (例えば $T = 0$ や $T = \zeta_{p^n} - 1$ $(n \geq 1)$, $T = u^k - 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ での値など) が, 楕円曲線の Hasse-Weil L 関数のある family の

$$\frac{(L \text{ 関数の整数点での値})}{\text{“period”}} \in \overline{\mathbb{Q}}$$

たち ($\times$(補正項)) を表すように定義されるためである (interpolation property). このとき Hasse-Weil L 関数の family とは, あるアーベル指標でひねったものたちである. この, アーベル指標たちや整数点の動かし方の違いにより, 上のような様々な種類の p 進 L 関数ができるのである.

(i) から (iv) の各々の p 進 L 関数に対し, 楕円曲線の数論的量 (Mordell-Weil 群, Tate-Shafarevich 群, p-進 regulator など) を結び付ける p-進 Birch-Swinnerton Dyer 予想, 更には p 進 L 関数の行列式表示ともいうべき, 岩澤主予想が定式化されている. このような代数的なものとの関係では、それぞれアーベル指標や整数点の動かす動かし方に対応した $\mathbb{Z}_p$-拡大体 (“cyclotomic”, “anti-cyclotomic” など) と関係があり，各々の p 進 L 関数に対して岩澤理論が展開される.

また, 2 変数の p 進 L 関数とよばれるものもいくつか存在する. (Hida deformation に付随するもの [Gr-St]，[Ki] など. CM 楕円曲線に付随するもの [Ya] など.) 上で述べた (i), (iii) などはこれらのものをある方向に specialize して得られるものに一致する.

この記事では, 上の (i) の cyclotomic な p 進 L 関数に対象をしぼり, 特に p で 楕円曲線が good ordinary reduction をもつ場合に, 上で述べた interpolation property, 更に p 進 Birch-Swnnewton Dyer 予想, 岩澤主予想について説明する.

$E/\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とするとき, 重要な事実は E が modular であるということである (谷山志村予想 定理 5.1). つまりある weight 2 の cusp form f があって L 関数の一致

$$L(E,s) = L(f,s)$$

が成り立つ (これらの定義については §2, §5 参照). これがあるゆえに Hasse-Weil L 関数の解析接続が言える. cyclotomic な p 進 L 関数は, L 関数を Dirichlet 指標でひねったものの 1 での値を interpolate するものとして定義される (定理 4.1). だが, $s=1$ は収束域の外にあるので、解析接続なしにはそれについて何も言うことができない.

それゆえ, 実は楕円曲線というよりはむしろ保型形式の L 関数から p 進 L 関数をつくると言った方が適切である. (weight の高い保型形式も cyclotomic p 進 L 関数をもつ (注意 4.3).)

そこで我々はまず weight 2 の保型形式から出発 (§2) してその 1 での値の性質を復習し (§3), それに付随する (cyclotomic な) p 進 L 関数を構成する (§4). 次に weight 2 の保型形式と, 楕円曲線との間の関係を述べ (§5.2), 楕円曲線に付随する代数的対象と p 進 L 関数の関係について述べる (§5.4, §6).

なお, 上の (i) (ii) (iv) の p 進 L 関数については [BD] に survey されているので参照してほしい. (iii) については [dS] など参照.

注意 1.1. 上に挙げた文献の多くは p 進 L 関数を

$$L_p(s) = \int_{\mathbb{Z}_p} u^{s-1} d\mu$$

という積分の形で定義する. 但し μ は $\mathbb{Z}_p$ 上の p 進 measure である. $\mathbb{Z}_p$ 上の p 進 measure と 巾級数 $F(T)$ の間には canonical な一対一対応があり (cf. [Wa] Chap. 12), 上で述べたことと等価であることを注意しておく.

2. 保型形式と L 関数

2.1. **保型形式.** 保型形式についての詳細は [NT] 参照.

上半平面 $\mathcal{H} := \{z = x+iy | y > 0\}$ $(\subset \mathbb{C})$ 上の関数 f への $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用を

$$g^* f(z) := (cz+d)^{-2} f(gz)$$

と定める. 但し $gz = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

f が weight 2, level N の cusp form とは，$\mathcal{H}$ 上の正則関数で

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \mod N \right\}$$

の任意の元 γ に対し，

$$\gamma^* f = f$$

であり，かつ任意の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の元 g に対し，

$$\lim_{z \to i\infty} g^* f(z) = 0$$

となるものである．

weight 2, level N の cusp form 全体のなす空間 $S_2(\Gamma_0(N))$ には Hecke 作用素 T_l (l は素数) が次のように作用する．

$$T_l f(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} f(\frac{z+k}{l}) + l f(lz) & (l \nmid N) \\ \dfrac{1}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} f(\frac{z+k}{l}) & (l | N) \end{cases} \tag{2.1}$$

全ての l に対し T_l の固有関数となっているものを Hecke eigen form であるという．

$f \in S_2(\Gamma_0(N))$ に対し，$f(z+1) = f(z)$ であるから,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n \quad (q = e^{2\pi i z}, a(n) \in \mathbb{C})$$

と Fourier 展開される．$a(1) = 1$ であるものを normalized という．f が normalized かつ Hecke eigen ならば

$$T_l f = a(l) f \tag{2.2}$$

が成り立つ．また，全ての n で $a(n) \in \mathbb{Q}$ であるものを $\mathbb{Q}$ 上定義された cusp form という．

new form がどういうものであるかということはここでは詳述しない ([Kna] などを参照．) が、例えば $M|N$ なる $M \neq N$ と $r|\frac{M}{N}$ なる整数に対し, weight 2, level M の cuspform g をとると, $f(z) := g(rz)$ は $S_2(\Gamma_0(N))$ の元となるが, このような “下の level からくる” ものは old form と呼ばれる．new form とは, このように下の level からはこないようなものである．

2.2. L **関数．** weight 2, level N の cusp form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n$$

に対し, L 関数

$$L(f,s) := \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$$

を考える．$|a(n)|$ の漸近評価により，これは $\mathrm{Re}(s) > 3/2$ で絶対収束する正則関数である．さらに，Mellin 変換

$$L(f,s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} f(iy)y^{s-1}dy$$

$(\mathrm{Re}(s) > 3/2)$ の形に書ける．すると右辺の積分は全ての $s \in \mathbb{C}$ で収束するので，全平面で正則に解析接続される．

さらに我々は，指標でひねった L 関数を考える必要がある．χ を (conductor m の) Dirichlet 指標

$$\chi : (\mathbb{Z}/m)^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$$

とする. このとき

$$L(f,\chi,s) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)a(n)n^{-s}$$

とおくと，$L(f,s)$ と同様 $\mathrm{Re}(s) > 3/2$ で絶対収束し、全平面で正則に解析接続される．なぜなら，

$$f_{\chi}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)a(n)q^n \tag{2.3}$$

とおけば，$f_{\chi}(z)$ は weight 2, level Nm^2 の $\Gamma_1(Nm^2)$ に関する cusp form となることが知られている．ここで, "$\Gamma_1(N)$ に関する cusp form" というのは, §2.1 における cusp form の定義において, $\Gamma_0(N)$ をその有限指数部分群

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \;\middle|\; a \equiv d \equiv 1 \mod N \right\}$$

に置き換えたものである．このときも, 上と全く同様に, Mellin 変換

$$L(f,\chi,s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} f_{\chi}(iy)y^{s-1}dy \tag{2.4}$$

と書くとき，右辺の積分は全ての $s \in \mathbb{C}$ で収束することが示される．

p 進 L 関数を考えるとき，これらの $s = 1$ での値，$L(f,\chi,1)$ が大事である．(2.4) により

$$L(f,\chi,1) = 2\pi i \int_{i\infty}^{0} f_{\chi}(z)dz \tag{2.5}$$

となる．但し, ここでは変数変換 $(z = iy)$ をして，上半平面の $i\infty$ から 0 に至る直線を積分区間とする複素線積分とする．

3. L 関数の 1 での値, Period, Modular Symbol

以下，f を weight 2, level N の $\mathbb{Q}$ 上定義された normalized Hecke eigen cusp new form とする．

3.1. L 関数の 1 での値.

$$\underline{\mathrm{Cusps}} := \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$$

とおく．$\alpha \in \underline{\mathrm{Cusps}}$ に対し，

$$[\alpha]_f := 2\pi i \int_{i\infty}^{\alpha} f(z)dz$$

と定義する．(2.5) より $L(f,1) = [0]_f$ であることに注意しておく．また，容易に分かるように

$$[\alpha]_f = \overline{[-\alpha]_f} \tag{3.1}$$

である．($\overline{*}$ は複素共役.)

命題 3.1 (cf. [Man1] Theorem 9.9)**.** χ を *conductor* m の *Dirichlet* 指標とする．このとき

$$L(f,\chi,1) = \frac{\tau(\chi)}{m} \sum_{b=0}^{m-1} \overline{\chi}(-b) \left[\frac{b}{m}\right]_f .$$

但し $\tau(\chi)$ は *Gauss* 和

$$\sum_{b=0}^{m-1} \chi(b) e^{\frac{2\pi i b}{m}} \tag{3.2}$$

であり, $\overline{\chi}$ は χ の複素共役である.

(証明)　有限群 $\mathbb{Z}/m$ に対する Fourier 変換公式により，

$$\chi(n) = \frac{\tau(\chi)}{m} \sum_{b=0}^{m-1} \overline{\chi}(-b) e^{\frac{2\pi i b n}{m}}$$

である．これを (2.3) に代入すると

$$f_\chi(z) = \frac{\tau(\chi)}{m} \sum_{b=0}^{m-1} \overline{\chi}(-b) f(z + \frac{b}{m}).$$

(2.5) と $[\alpha]_f$ の定義により，与式を得る．

3.2. **Period.** 一般に $L(f,\chi,1)$ は代数的数でない．代数的数を取り出すために "period" が必要となる．

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対し，$\gamma(i\infty) = \dfrac{a}{c}$ は $\underline{\mathrm{Cusps}}$ の元である．

$$\mathcal{L}_f := \{[\gamma(i\infty)]_f | \gamma \in \Gamma_0(N)\} \subset \mathbb{C}$$

とおく．

定理 3.1 (Eichler-Shimura, cf. [Kna] Chap. VI §11 Th. 11.74)**.** *f を weight 2, level N の $\mathbb{Q}$ 上定義された normalized Hecke eigen cusp new form とするとき，$\mathcal{L}_f$ は $\mathbb{C}$ の lattice となる．*

そこで real period, imaginary period を次のように定義する．

$$\mathcal{L}_f^{\pm} := \{[\gamma(i\infty)]_f \pm [-\gamma(i\infty)]_f | \gamma \in \Gamma_0(N)\} \quad (\text{複号同順})$$

とおくとき，$[-\gamma(i\infty)]_f$ は容易に分かるように $\mathcal{L}_f$ の元であるから，$\mathcal{L}_f^{\pm} \subset \mathcal{L}_f$ である．また，(3.1) により，

$$\mathcal{L}_f^{+} \subset \mathbb{R} \quad (\text{resp. } \mathcal{L}_f^{-} \subset i\mathbb{R})$$

である．ゆえに $\mathcal{L}_f^{+}$ (resp. $\mathcal{L}_f^{-}$) は $\mathbb{R}$ (resp. $i\mathbb{R}$) の lattice となるのでその正の最小の元 (resp. 上半平面の絶対値最小の元) を Ω_f^{+} (resp. Ω_f^{-}) と書き，real (resp. imaginary) period と呼ぶ．即ち，

$$\mathcal{L}_f^{\pm} = \mathbb{Z} \cdot \Omega_f^{\pm}.$$

注意 3.1. 定理 3.1 について少し説明する．ここでは Hecke eigen であるということが非常に重要である．$\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \underline{\mathrm{Cusps}}$ とおく．

$$X_0(N)^{\mathrm{an}} := \Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}^*$$

にはコンパクトリーマン面の構造が入る．$\gamma \in \Gamma_0(N)$ に対し $i\infty$ から $\gamma(i\infty)$ へ至る直線の像 β は $X_0(N)^{\mathrm{an}}$ の閉曲線である．一方 $S_2(\Gamma_0(N))$ は $X_0(N)^{\mathrm{an}}$ の正則微分形式全体と同一視できる．$*^{\vee}$ を $*$ の $\mathbb{C}$-dual とするとき,

$$H_1(X_0(N),\mathbb{Z}) \hookrightarrow S_2(\Gamma_0(N))^{\vee}$$

を $\beta \mapsto (\omega \mapsto \displaystyle\int_\beta \omega)$ で定義すると

$$J_0(N)^{\mathrm{an}} := S_2(\Gamma_0(N))^{\vee}/H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$$

は $X_0(N)^{\mathrm{an}}$ の Jacobian である．$J_0(N)^{\mathrm{an}}$ には $S_2(\Gamma_0(N))$ へのそれから誘導される Hecke 作用素の作用がある．$S_2(\Gamma_0(N))^{\vee}$ の商 $(\mathbb{C}\cdot f)^{\vee}$ は この Hecke 作用の同時固有空間であるが, それに対応する $J_0(N)^{\mathrm{an}}$ の商は 1 次元トーラスになることが示されるのである．つまり商は $(\mathbb{C}\cdot f)^{\vee}/\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ は lattice となる． $(f \mapsto 1)$ を 1 に送ることにより $(\mathbb{C}\cdot f)^{\vee}$ を

$\mathbb{C}$ と同一視すると $\mathcal{L}$ は 上で定義した $\mathcal{L}_f$ に一致する．Eichler-Shimura は更に トーラス $\mathbb{C}/\mathcal{L}_f$ が $\mathbb{Q}$ 上定義される楕円曲線であることを示した．

3.3. **Modular Symbol.** 任意の $\underline{\mathrm{Cusps}}$ の元 α について, 次が成り立つ．

定理 3.2 (Manin[Man1], cf. [La] Chap IV §2)．f のみによるある整数 $c = c_f$ が存在して，任意の $\underline{\mathrm{Cusps}}$ の元 α について

$$[\alpha]_f \in \frac{1}{c}\mathcal{L}_f$$

となる.

そこで, $\alpha \in \underline{\mathrm{Cusps}}$ に対し

$$x_f^{\pm}(\alpha) := \frac{[\alpha]_f \pm [-\alpha]_f}{\Omega_f^{\pm}} \quad (\text{複号同順})$$

と定義する. 定理3.2 と (3.1) により，

$$x_f^{\pm}(\alpha) \in \frac{1}{c}\mathbb{Z}$$

である．

$$x_f^{\pm} : \underline{\mathrm{Cusps}} \to \mathbb{Q}$$

を f の modular symbol と呼ぶ．定理3.1 から直ちに次の定理を得る．

定理 3.3 (Shimura-Manin, [Man1],[Man2] Theorem 5.6)．

$$\frac{m}{\tau(\chi)} \frac{L(f,\chi,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sign}(\chi)}} = \frac{\chi(-1)}{2} \sum_{b=0}^{m-1} \overline{\chi}(b) x_f^{\mathrm{sign}(\chi)}(\frac{b}{m})$$

但し $\tau(\chi)$ は *Gauss* 和 (3.2) であり,

$$\mathrm{sign}(\chi) := \begin{cases} + & (\mathit{if}\ \chi(-1) = 1) \\ - & (\mathit{if}\ \chi(-1) = -1) \end{cases}$$

である．特に $\dfrac{m}{\tau(\chi)} \dfrac{L(f,\chi,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sign}(\chi)}}$ は代数的数である．

また，Modular symbol には Hecke 作用からくる次の関係式がある．

$$a(l)x_f^{\pm}(\alpha) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} x_f^{\pm}(\frac{\alpha+k}{l}) + x_f^{\pm}(l\alpha) & (l \nmid N) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} x_f^{\pm}(\frac{\alpha+k}{l}) & (l | N) \end{cases} \tag{3.3}$$

これは(2.1) (2.2) と modular symbol の定義より直ちにでて来る．

注意 3.2. modular symbol は f が与えられれば計算できる。[Cr], [St1], [HM] 参照．

4. p 進 L 関数とその構成

以下重要な仮定として p は f に対して次を満たすとする.

$$p \nmid N \text{ かつ } a_p \not\equiv 0 \mod p \tag{4.1}$$

これを p は f に関して good ordinary な素数であるという.
(good ordinary でない場合の p 進 L 関数については注意 4.3 参照.)
また, 埋め込み

$$\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C} \quad \text{と,} \quad \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$$

をひとつ固定しておく.

4.1. p 進 L とは.

χ を p に関して first kind (conductor が p^2 で割れない) の Dirichlet 指標とする.

$$\chi : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

$\mathcal{O}_\chi$ を $\mathbb{Z}_p$ に χ の値を全て付加した環とする.
f の p 進 L 関数 とは, 次のようなものである.

定理 4.1 (Mazur-Swinnerton Dyer[M-SD], cf. [St2] Th'm 4.4)**.** 次をみたすような巾級数

$$F_{f,\chi}(T) \in \frac{1}{c}\mathcal{O}_\chi[[T]] \ (\exists c \in \mathbb{Z})$$

が唯一つ存在する*: 整数 $n \geq 1$ と, conductor p^n で位数 p^{n-1} の Dirichlet 指標 ϕ を任意にとるとき,*

$$\begin{aligned} F_{f,\chi}(\phi(1+p)-1) &= \alpha^{-n}(1-\chi\phi(p)\alpha^{-1})(1-\overline{\chi\phi}(p)\alpha^{-1}) \\ &\qquad \times \frac{m'p^n}{\tau(\overline{\chi\phi})}\frac{L(f,\overline{\chi\phi},1)}{\Omega_f^{\mathrm{sign}(\chi)}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

但し α は $T^2 - a_pT + p$ の根で $\mathbb{Z}_p^\times$ の元になるものとする ($a_p \not\equiv 0 \mod p$ なので唯一つ存在). また, m' は χ の conductor m の p と素な部分とする.

定義 4.1. f, χ に対し,

$$L_p(f,\chi,s) := F_{f,\overline{\chi}}((1+p)^{s-1}-1)$$

と定義し, f の χ に対する p 進 L 関数 と呼ぶ. これは $s=1$ を中心とする p 進解析関数となる.

注意 4.1. $F_{f,\chi}(T) \neq 0$ である (Rohrlich [Ro]).

注意 4.2. c は f にのみ依るが, $c=1$ にとれることが予想されている. ([St2] §4 Conj. IV). 有限個を除く (good ordinary な) p で予想は成り立つことが分かっている. ([St2] Th'm 4.6).

4.2. **構成.** $F_{f,\chi}(T)$ の構成は大きく分けて2つの方法がある．それは

(i) modular symbol による構成 (Mazur-Swinnerton Dyer).

(ii) Perrin-riou map と Beilinson-Kato element による構成 (Kato [Ka]).

である．この記事では (i) による構成について述べる．ここでの $F_{f,\chi}(T)$ の構成は基本的には [MTT] によるものである.

各 n に対し群環の元

$$\theta_{f,m',n}^{\mathrm{sign}(\chi)} := \sum_{a\in(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times} \Theta_n^{\mathrm{sign}(\chi)}(a)[a] \in \frac{1}{c}\mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times] \tag{4.3}$$

で，次の (1) (2) を満たすものがあるとする．ここで $\Theta_n^{\mathrm{sign}(\chi)}(a) \in \frac{1}{c}\mathbb{Z}_p$ であり，$[*]$ は $(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times$ の元であることを強調するためにかぎかっこで書いた.

(1) 自然な全射 $(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times \to (\mathbb{Z}/m'p^{n-1})^\times$ による写像

$$\frac{1}{c}\mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times] \to \frac{1}{c}\mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/m'p^{n-1})^\times]$$

によって $\theta_{f,m',n}^{\mathrm{sign}(\chi)}$ は $\theta_{f,m',n-1}^{\mathrm{sign}(\chi)}$ にうつる.

(2) (4.2) の Dirichlet 指標 $\chi\phi$ により誘導される写像

$$\chi\phi : \frac{1}{c}\mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times] \to \overline{\mathbb{Q}_p} \quad ([a] \to \chi\phi(a))$$

によって

$$\chi\phi(\theta_{f,m',n}^{\mathrm{sign}(\chi)}) = \sum_{a\in(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times} \Theta_n^{\mathrm{sign}(\chi)}(a)\chi\phi(a)$$

が，(4.2) の右辺に等しくなる.

まずこのようなものが存在すれば定理の $F_{f,\chi}(T)$ が構成できることを示す．(1) によって

$$\theta_{f,m',\infty}^{\mathrm{sign}(\chi)} := (\theta_{f,m',n}^{\mathrm{sign}(\chi)})_n \in \varprojlim{}_n \frac{1}{c}\mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times].$$

である．Γ_n を $(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times$ の $1+m'p$ で生成される部分群とする．$\Gamma_n \cong \mathbb{Z}/p^{n-1}$ である．canonical な同型

$$(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times \cong \Gamma_n \times (\mathbb{Z}/m'p)^\times$$

がある. $[a]$ の Γ_n への射影を $\gamma_n(a)$ とかく. $(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times \to (\mathbb{Z}/m'p^{n-1})^\times$ により

$$\begin{cases} \Gamma_n \to \Gamma_{n-1} \\ (\mathbb{Z}/m'p)^\times \cong (\mathbb{Z}/m'p)^\times \end{cases}$$

である．故に

$$\varprojlim{}_n \frac{1}{c}\mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/m'p^n)^\times] = \varprojlim{}_n \left(\frac{1}{c}\mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/m'p)^\times]\right)[\Gamma_n].$$

更に $\frac{1}{c}\mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/m'p)^\times] \to \frac{1}{c}\mathcal{O}_\chi$ $(\delta \in \Delta \rightsquigarrow \chi(\delta))$ より誘導される

$$\varprojlim_n \left(\frac{1}{c}\mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/m'p)^\times]\right)[\Gamma_n] \to \varprojlim_n \frac{1}{c}\mathcal{O}_\chi[\Gamma_n].$$

と，よく知られた同型

$$\varprojlim_n \frac{1}{c}\mathcal{O}_\chi[\Gamma_n] \cong \frac{1}{c}\mathcal{O}_\chi[[T]]$$

(写像は $(\gamma_n(1+p))_n \in \varprojlim_n \mathcal{O}_\chi[\Gamma_n]$ に $T+1$ を対応させる．cf. [Wa]) との合成による $\theta^{\mathrm{sign}(\chi)}_{f,m',\infty}$ の像を $F_{f,\chi}(T)$ とおく．

$$F_{f,\chi}(T)(\phi(1+p)-1) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/m'p^n)^\times} \Theta^{\mathrm{sign}(\chi)}_n(a)\chi\phi(a)$$

となる．従って (2) により求める巾級数を得る．

そこで (1) (2) を満たす $\Theta^{\mathrm{sign}(\chi)}_n(a)$ であるが，次のようにおけばよい．

$$\Theta^{\mathrm{sign}(\chi)}_n(a) := \frac{\chi(-1)}{2}\alpha^{-n-1}(\alpha x^{\mathrm{sign}(\chi)}_f(\frac{a}{m'p^n}) - x^{\mathrm{sign}(\chi)}_f(\frac{a}{m'p^{n-1}})) \in \frac{1}{c}\mathbb{Z}_p$$

(2) は定理 3.3 より従う．(1) については等式

$$\Theta^{\mathrm{sign}(\chi)}_{n-1}(a) = \sum_b \Theta^{\mathrm{sign}(\chi)}_n(b)$$

(a は $\mathbb{Z}/m'p^{n-1}$ の任意の元, b は $\mathbb{Z}/m'p^n$ の元で, $\bmod m'p^{n-1}$ により a となるもの全てを動く．) を示せばよいが，これは (3.3) より従う．

注意 4.3. p が $p \nmid N$ かつ $a_p \equiv 0 \mod p$ (p は supersingular prime) の場合にも p 進 L 関数は構成されている．この場合も (4.2) を満たすものとして巾級数 $F_{f,\chi}(T)$ が構成されるのであるが, $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ にとれないため, $F_{f,\chi}(T) \in \mathbb{Q}_p[[T]]$ とはなるが，係数の分母は非有界となる ([MTT])．この点が good ordinary prime と大きく異なる点である．$p|N$ の場合にも一部の場合を除き p 進 L 関数が構成されている．また, 一般に weight k ($k \geq 2$) の保型形式に対しても同様に p 進 L 関数が構成される (Manin, Amice-Velu, Mazur-Tate-Teitelbaum[MTT])．

注意 4.4. この構成から, f が具体的に与えられれば, 注意 3.2 より modular symbol が計算でき, p 進 L 関数は近似的に計算できる ([HM] も参照).

5. **楕円曲線と p 進 BSD**

5.1. **楕円曲線とその period.** 楕円曲線の基本的事実については [Sil] 参照.

$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とは Weierstrass 標準型

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \tag{5.1}$$

($a_i \in \mathbb{Q}$) で定まる射影空間 $\mathbb{P}^2$ 内の非特異代数曲線である．但し, 非特異であるから判別式

$$\Delta(a_1, a_2, a_3, a_4, a_6) \neq 0$$

でなければならない. (判別式の定義は [Sil] Chap. III §1 参照.) 式 (5.1) で定まる $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線たちが，変数変換

$$\begin{cases} x = u^2x' + r \\ y = u^3y' + su^2x' + t \end{cases} \quad (u,\, s,\, r,\, t \in \mathbb{Q},\, u \neq 0)$$

で移りあうとき，そのときに限り，互いに $\mathbb{Q}$ 上同型となる.

$E/\mathbb{Q}$ を楕円曲線とする．その $\mathbb{Q}$ 上の同型類の中で，式 (5.1) における係数 a_i が全て $\mathbb{Z}$ に入るものを $E/\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}$ 上の Weierstrass model と呼ぶ. このとき判別式も $\mathbb{Z}$ に入る. $E/\mathbb{Q}$ に同型な $\mathbb{Z}$ 上の model たちのうちで，判別式が他の全ての model の判別式を割るものが存在する ([Sil] Chap. VIII §8). これを $E/\mathbb{Q}$ の minimal Weierstrass model という. その判別式を E の判別式といい, Δ_E とかく.

楕円曲線 $E/\mathbb{Q}$ に対し, minimal Weierstrass model (5.1) を一つ固定する. これより定まる正則微分形式

$$\omega_E := \frac{dx}{2y + a_1x + a_3}$$

を考える. これを E の Neron differential という. γ が E の原点 (無限遠点) を出発点とする $E(\mathbb{C})$ 内の閉曲線全体を動くものとするとき,

$$\mathcal{L}_E := \left\{ \int_\gamma \omega_E \;\middle|\; \gamma : \text{原点を始点とする閉曲線} \right\} \subset \mathbb{C}$$

は $\mathbb{C}$ の lattice となる ([Sil] Chap. VI). 閉曲線 γ に対し, $E(\mathbb{C})$ での複素共役による像のなす閉曲線を $\overline{\gamma}$ とすると, $\int_{\overline{\gamma}} \omega_E = \overline{\int_\gamma \omega_E} \in \mathcal{L}_E$ である. そこで

$$\mathcal{L}_E^\pm := \{ r \pm \overline{r} | r \in \mathcal{L}_E \} \subset \mathcal{L}_E \text{ (複号同順)}$$

とおくと, $\mathcal{L}_E^+$ (resp. $\mathcal{L}_E^-$) は $\mathbb{R}$ (resp. $i\mathbb{R}$) の lattice となるので, その正の最小の元 (resp. 上半平面の絶対値最小の元) を Ω_E^+ (resp. Ω_E^-) と書き，E の real (resp. imaginary) Neron period と呼ぶ ($\mathcal{L}_E^\pm = \mathbb{Z} \cdot \Omega_E^\pm$). $\Omega_E^+ = \int_{E(\mathbb{R})} \omega_E$ である.

5.2. L **関数と谷山-志村予想.** $E/\mathbb{Q}$ を楕円曲線とし，minimal Weierstrass model (5.1) を一つ固定する.

l を素数とする．$a_i \in \mathbb{Z}$ であるから, 係数を modulo l して考えることによって $\mathbb{F}_l$ 上の曲線が定義される．これを $\tilde{E}_l$ と書く．$\tilde{E}_l$ が非特異であることと $l \nmid \Delta_E$ は同値である. このとき "E は l で good reduction を持つ" という．$l | \Delta_E$ のときは特異点を持つが、その特異点の type によって "E は l で split multiplicative, non-split multiplivative, あるいは additive reduction をもつ" という ([Sil] Chap. VII §5).

E の conductor $N_E \in \mathbb{Z}$ とは，$N_E | \Delta_E$ かつ Δ_E の素因子を全て含むもので,

$$\mathrm{ord}_l(N_E) \begin{cases} = 1 & (l \text{ が multiplicative}), \\ \geq 2 & (l \text{ が additive, } l \geq 5 \text{ なら } =2), \end{cases}$$

となるものである.

$E/\mathbb{Q}$ の Hasse-Weil L 関数とは次の解析関数である．

$$L(E,s) := \prod_{l\nmid\Delta_E}(1-a(l)l^{-s}+l^{1-2s})^{-1}\prod_{l|\Delta_E}(1-a(l)l^{-s})^{-1} \quad (s\in\mathbb{C}).$$

但し，$l\nmid\Delta_E$ のとき

$$a(l) := 1+l-\sharp\tilde{E}_l(\mathbb{F}_l)$$

とし，$l|\Delta_E$ のとき split multiplicative, non-split multiplivative, additive かに従い，$a(l)=1,-1,0$ とする．$a(l)$ の漸近評価により，$L(E,s)$ は $\mathrm{Re}(s)>3/2$ で絶対収束する解析関数となる．

有名な谷山志村予想，いまや定理として証明されたのは次である．

定理 5.1 (谷山-志村予想, [Wi], [BCDT])**.** $E/\mathbb{Q}$ に対し ある *weight* 2*, Level* N_E の *normalized Hecke Eigen cusp form* f_E が存在して

$$L(E,s)=L(f_E,s)$$

である．特に $L(E,s)$ は全平面に解析接続される．

注意 5.1. 定理 3.1, 注意 3.1 とも深く関係することだが, Eichler-Shimura は weight 2, Level N の normalized Hecke Eigen cusp form f に対し, 楕円曲線 $E_f/\mathbb{Q}$ で,

$$L(E_f,s)=L(f,s) \text{ かつ } \mathcal{L}_E=c'\mathcal{L}_f\ (c'\in\mathbb{Q})$$

なるものを構成した (cf. [Kna] Chap. VI §11 Th. 11.74).

注意 5.2. また, これも深い結果だが, L 関数が一致するということから, E と, E_{f_E} (上の注意によって f_E からつくられる楕円曲線) は isogenous であるという事実が分かる (Faltings の結果).

5.3. *E* **の** *p* **進** *L* **関数.** 注意 5.1, 5.2 により, ある有理数 $c_E^{\pm}$ が存在して

$$\Omega_{f_E}^{\pm}=c_E^{\pm}\Omega_E^{\pm}$$

である.

以下 p を good ordinary reduction を持つ素数 , 即ち

$$p\nmid\Delta_E \text{ かつ } a(p)\not\equiv 0 \mod p$$

とする. $p\nmid\Delta_E$ と $p\nmid N_E$ は同値であるからこれは modular form f_E について good ordinary であることと一致する. $f_E(z)$ に付随する p 進 L 関数 $F_{f_E,\chi}(T)$, $L_p(f_E,\chi,s)$ が §3 において定義されている．

定義 5.1. E の p 進 L 関数を

$$\begin{aligned} F_{E,\chi}(T) &:= c_E^{\mathrm{sign}\chi}F_{f_E,\chi}(T) \\ L_p(E,\chi,s) &:= F_{E,\overline{\chi}}((1+p)^s-1) \\ &= c_E^{\mathrm{sign}\chi}L_p(f_E,\chi,s) \end{aligned}$$

と定義する．

定理 4.1 により, $F_{E,\chi}(T)$ は次のような interpolation property をもつ: 整数 $n \geq 1$ と, conductor p^n で位数 p^{n-1} の Dirichlet 指標 ϕ を任意にとるとき,

$$F_{E,\chi}(\phi(1+p)-1) = \alpha^{-n}(1-\chi\phi(p)\alpha^{-1})(1-\overline{\chi\phi}(p)\alpha^{-1}) \\ \times \frac{m'p^n}{\tau(\overline{\chi\phi})} \frac{L(E,\overline{\chi\phi},1)}{\Omega_E^{\mathrm{sign}(\chi)}}.$$

以降簡単のため trivial 指標 $\chi_1 = 1$ の場合のみを考える．

$$F_E(T) := F_{E,\chi_1}(T)$$
$$L_p(E,s) := L_p(E,\chi_1,s)$$

とおく. $L_p(E,s)$ は $s=1$ のまわりの p 進解析関数であるので,

(5.2) $$L_p(E,s) = b_r(s-1)^r + b_{r+1}(s-1)^{r+1} + b_{r+2}(s-1)^{r+2} + \cdots \quad (b_r \in \mathbb{Q}_p)$$

と書ける．

5.4. p **進 Birch Swinnerton-Dyer 予想.** 楕円曲線を $E/\mathbb{Q}$ とする．まず予想を述べるに必要な, E に付随する数論的対象物を箇条書きする．
(1) Mordell-Weil 群: $\mathbb{Q}$ の拡大体 K に対し, K-有理点全体の集合 $E(K)$ はアーベル群となる．特に $[K:\mathbb{Q}]$ が有限の時 $E(K)$ は有限生成アーベル群となる (Mordell-Weil の定理 cf.[Sil] Chap. VIII §4).
(2) Tate-Shafarevitch 群: v が $\mathbb{Q}$ の素点を全て動くとき

$$\text{Ш}(E/\mathbb{Q}) := \mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}, E(\overline{\mathbb{Q}})) \to \prod_v H^1(\mathbb{Q}_v, E(\overline{\mathbb{Q}_v})))$$

と定義し, Tate-Shafarevitch 群という．次の予想は一般には証明されていない.

予想 5.1. Ш$(E/\mathbb{Q})$ は有限群である．

(3) Tamagawa factor: 素数 l に対し, reduction map

$$E(\mathbb{Q}_l) \to \tilde{E}_l(\mathbb{F}_l)$$

が定義される. $\tilde{E}_l(\mathbb{F}_l)^{\mathrm{sm}}$ を $\tilde{E}_l(\mathbb{F}_l)$ の非特異点全体とする. reduction map $E(\mathbb{Q}_l) \to \tilde{E}_l(\mathbb{F}_l)$ による $\tilde{E}_l(\mathbb{F}_l)^{\mathrm{sm}}$ の逆像を $E^0(\mathbb{Q}_l)$ とおく．Tamagawa factor とは

$$t_l := [E(\mathbb{Q}_l) : E^0(\mathbb{Q}_l)]$$

である．l が good なら $t_l = 1$ である．
(4) p 進 regulator: Neron-Tate height pairing (cf. [Sil] Chap. VIII §9) の p 進類似として Schneider は p 進 height pairing

$$<,>: (E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}) \times (E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}_p$$

を定義した ([Sch1], [Sch2])．$P_1, P_2, \cdots P_{r'} \in E(\mathbb{Q})$ を $E(\mathbb{Q})/E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}$ ($E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}$ は torsion 部分群) の生成元とする．このとき

$$R_p(E) := \det(< P_i, P_j >)_{1 \le i,j \le r'}$$

とおき, E の p 進 regulator という．

予想 5.2. $R_p(E) \neq 0$. 即ち p 進 height pairing は非退化である．

Neron-Tate height pairing は非退化であることが分かっているが, p 進 height pairing は非退化であるかどうか一般には分かっていないのである．

さて, p で E が good ordinary reduction を持つとすると,

予想 5.3 (p 進 Birch Swinnerton-Dyer 予想 cf. [MTT] §10)**.** 予想 5.1, 5.2 が正しいとする．

(i) $$\mathrm{ord}_{s=1} L_p(s,E) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}). \quad (\text{即ち}, r = r'.)$$

(ii) $$b_r = (\sharp \text{III}(E/\mathbb{Q})) \frac{R_p(E)}{(\sharp E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^2} (\prod_l t_l)(\sharp \tilde{E}_p(\mathbb{F}_p))^2.$$

但し, b_r は (5.2) における leading term の係数である．

注意 5.3. [Sch1], [Sch2] では, 一般の代数体 K 上定義された楕円曲線と, K 上の $\mathbb{Z}_p$-拡大に付随して, p 進 height が定義されている．今の場合 cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対するものを考えている ($\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Z}_p$-拡大は cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-拡大しかない．)

6. 楕円曲線の岩澤理論と岩澤主予想

楕円曲線の p 進 L 関数は行列式表示を持つと予想されている．それは岩澤主予想とよばれている．その説明のためまず楕円曲線の岩澤理論を説明する．詳しくは [Maz], [Man1], [Ku], [Gr] を参照してほしい．また、岩澤理論についての基本的事実は [Wa] Chap. 13, [Su] 参照．

6.1. 楕円曲線の岩澤理論.

E を $\mathbb{Q}$ 上 の楕円曲線とする．以下 p を E が good ordinary reduction をもつ素数とする．

$n \geqq 1$ にたいし, μ_{p^n} を 1 の p^n 乗根のなす群とし, $\mu_{p^\infty} = \cup_n \mu_{p^n}$ とする．$\mathbb{Q}_\infty$ を $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ の部分体で $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群が $\mathbb{Z}_p$ に同型となる唯一の体とする ($\mathbb{Q}$ の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大). $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ とおく．canonical に同型

$$1 + p\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \Gamma$$

があるので, $1+p$ の像を γ_0 とおく．

E の $\mathbb{Q}_\infty$ 上の (p^∞-)Selmer 群とは,

$$\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty) := \mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}_\infty, E_{p^\infty}) \to \prod_v H^1(\mathbb{Q}_{\infty,v}, E))$$

と定義される群である．ここで E_{p^∞} は E の p-巾分点全体のなす群とする．次のような完全列がある．

$$0 \to E(\mathbb{Q}_\infty) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty) \to \text{III}(E/\mathbb{Q}_\infty)_{p^\infty} \to 0. \tag{6.1}$$

但し $\text{III}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は $\mathbb{Q}_\infty$ 上の Tate-Shafarevitch 群である．

$\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ には Γ が作用する．その Pontryagin dual

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{E/\mathbb{Q}_\infty} := \mathrm{Hom}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

は $\gamma \in \Gamma$ が $\phi \in \mathfrak{X}$ に, $(\gamma\phi)(s) = \phi(\gamma^{-1}s)$ と作用するものとして compact な Γ-module となる．更に $\mathfrak{X}$ は $\mathbb{Z}_p$-module でもあるので, 不定元 T の作用を $\gamma_0 - 1$ と定義することにより, $\mathbb{Z}_p[[T]]$-module の構造をもつ．これは有限生成 $\mathbb{Z}_p[[T]]$-module となる ([Man1] Th'm 4.5).

定理 6.1 (Mazur の予想, 加藤 [Ka]). $\mathfrak{X}$ は更に $\mathbb{Z}_p[[T]]$-*torsion* である．

注意 6.1. ここで p が good ordinary であることが重要である．

M を有限生成 torsion $\mathbb{Z}_p[[T]]$-module とすると, kernel と cokernel が共に有限群となる次のような準同型が存在する．

$$M \to (\oplus_i \Lambda/p^{n_i}) \oplus (\oplus_j \Lambda/(f_j)^{e_j})$$

ここで f_j らは $\mathbb{Z}_p[T]$ の既約 distinguished 多項式であり, $\{r, n_i, f_j, e_j\}$ は M に対し unique である．そこで

$$\mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[T]]}(M) := p^{\sum_i n_i} \prod_j f_j^{e_j}$$

とおき, M の "characteristic polynomial" とよぶ．

6.2. **岩澤主予想．** ここでも trivial な Dirichlet 指標 χ_1 のみを考える．

$$F_E(T) := F_{E,\chi_1}(T)$$

と書いたのであった．$\mathbb{Z}_p[[T]]$ についての Weierstrass の準備定理により,

$$F_E(T) = p^\mu P_E(T) U(T)$$

($P_E(T)$ は $\mathbb{Z}_p[T]$ の distinguished な多項式, $U(T)$ は $\mathbb{Z}_p[[T]]$ の可逆元) と一意的にかける．

予想 6.1 (岩澤主予想, [M-SD] §9 conj. 3). $E/\mathbb{Q}$ を楕円曲線とし，p で good ordinary reduction をもつとする．このとき注意 4.2 の予想 の下で

$$\mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[T]]}(\mathfrak{X}_{E/\mathbb{Q}_\infty}) = p^\mu P_E(T)$$

注意 6.2. 加藤 (cf. [Ka]) により, 次が示されている．

$$\mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[T]]}(\mathfrak{X}_{E/\mathbb{Q}}) \;\Big|\; (p^n P_E(T)) \quad (\exists n)$$

岩澤主予想から直ちに次が言える．

$$V_E := \mathfrak{X}_{E/\mathbb{Q}_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

とおくと V_E は有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間であり，

$$\det(\gamma_0 - 1 \mid V_E) = P_E(T).$$

$F_E(T)$ の零点は $P_E(T)$ の零点と一致するので，これが E の p 進 L 関数 $F_E(T)$ あるいは $L_p(E, s)$ の行列式表示と考えられる．

注意 6.3. trivial でない χ に対する，$F_{E,\chi}(T)$ についても同様なことが成り立つが，ここでは簡単のために $\chi = \chi_1$ の場合のみを考えた．

p 進 BSD と岩澤主予想は次のように関係する．

定理 6.2 (Perrion-Riou [Pe])**.** *E と p は上と同様とする．岩澤主予想と 予想 5.2 ($R_p(E) \neq 0$) が正しければ予想 5.3 の (i) は正しく，更に (ii) の両辺の p 進 order は等しい．*

References

[BCDT] Breuil, C., Conrad, B., Diamond, F., Taylor, R.: *"On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic excercises"*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 843–939.

[BD] Bertolini, M. and Darmon, H. *"The p-adic L-functions of modular elliptic curves"* in 2001 and Beyond, Springer-Verlag, (2001).

[dS] de Shalit, E.: *"Elliptic curves with complex multiplication and and Iwasawa Theory"*, (),–.

[Cr] Cremona, J. E.: *"Algorithms for Modular Elliptic curves"* 2nd ed., Cambridge Univ. Press (1996).

[Gr] Greenberg, R.: *"Iwasawa theory for elliptic curves"*, L. N. M., **1716** Springer, (1999), 51–144.

[Gr-St] Greenberg, R. and Stevens, G. : *"p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms"*, Invent. Math. **111** (1993), 407–447.

[HM] 八森 祥隆, 松野 一夫: *"楕円曲線の p 進 L 関数の計算"*, 第 3 回津田塾大学整数論シンポジウム報告集 (1997).

[Ka] Kato, K.: *"p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms"*, to appear in Asterisque.

[Ki] Kitagawa, K: *"On standard p-adic L-functions of families of elliptic cusp forms"*, p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (1991), 81–110.

[Kna] Knapp, A. W.: *"Elliptic curves"*, Math. Notes 40, Princeton Univ. Press (1992).

[Ku] 栗原 将人: "岩澤理論の一般化についての概説", R.I.M.S. 講究録 **925** (1995), 53–65.

[La] S. Lang: *"Introduction to Modular Forms"*, Grundlehren der math. Wissenshaften **222**, Springer-Verlag (1976).

[Man1] Manin, J. I.: *"Cyclotomic Fields and Modular Curves"*, Russian Math. surveys **26** (1971), 7–78.

[Man2] Manin, J. I.: *"Parabolic Points and Zeta Functions of Modular Elliptic Curves"*, Math. USSR-Izv. **6** (1972), 19–64.

[Maz] Mazur, B.: *"Rational Points of Abelian Varieties with Values in Towers of Number Fields"*, Invent. Math. **18** (1972), 183–266.

[M-SD] Mazur, B. and Swinnerton-Dyer, P.: *"Arithmetic of Weil Curves"*, Invent. Math. **25** (1974), 1–61.

[MTT] Mazur, B., Tate, J. and Teitelbaum, J.: *"On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer"*, Invent. Math. **84** (1986), 1–48.

[NT] 成田宏秋, 都築正男: THIS VOLUME.

[Pe] Perrin-Riou, B.: *"Théorie d'Iwasawa et hauters p-adiques (cas des variétés abéliennes)"*, Séminaire de Théorie de Nombres, Paris, 1990–91, Progr. in Math. **108** Birkhauser (1993), 203–220.

[Ro] Rohrlich, D. E.: *"On L-functions of elliptic curves and cyclotomic towers"*, Invent. Math. **75** (1984), 409–423.

[Sch1] Schneider, P.: *"p-adic height pairings I"* Invent. Math. **69** (1982), 401–409.

[Sch2] Schneider, P.: *"p-adic height pairings II"* Invent. Math. **79** (1985), 329–374.
[Sil] Silverman, J., H.: *"The arithmetic of elliptic curves"* GTM **106** Springer-Verlag, New York, (1986).
[St1] Stevens, G.: *"Arithmetic on Modular Curves"*, Progr. in Math.**20** Birkhäuser (1982).
[St2] Stevens, G.: *"Stickelberger elements and modular parametrizations of elliptic curves"*, Invent. Math. **98** (1989), 75–106.
[Su] 隅田浩樹: THIS VOLUME
[Ya] Yager, R. I.: *"On two valuable p-adic L-functions."*, Ann. of Math. (2) **115** (1982), 411–449.
[Wa] Washignton, L. C.: *"Introduction to Cyclotomic Fields"*, 2nd ed. G.T.M. no.83, Springer, New York (1997).
[Wi] Wiles, A.: *"Modular elliptic curves and Fermat's last theorem"*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), 443–551.

e-mail: `yhachi@math.gakushuin.ac.jp`