岩澤理論の紹介

第十回整数論サマースクール 若手の時間

八森 祥隆 (学習院大理学部 学振特別研究員 PD)

岩澤理論は, 現在では多様な広がりと深みをもっているが, ここでは, その最初の部分を簡単に紹介する. 詳細については参考文献, 更にそれらの中に挙げられている文献を参照して下さい.

(狭義の) 岩澤理論とは, 代数体の $\mathbb{Z}_p$-拡大の理論である. そこでまず, $\mathbb{Z}_p$-拡大とはなにかを説明し, 最初の結果である岩澤類数公式を紹介する. その証明の鍵であり, 岩澤理論全体の根幹となるものは, 巾級数環 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とその上の加群についての理論である. 最後に, 理論の白眉である岩澤主予想について述べる.

1. $\mathbb{Z}_p$-拡大, 円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大

次のような状況を考える. k を有限次代数体とし, p を素数としたとき, 体の拡大の系列

$$k = k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset \cdots \subset k_n \subset \cdots$$

で, $[k_n : k] = p^n$ なる巡回拡大になっているものを考える. 即ち, k_n/k は Galois 拡大で,

$$\mathrm{Gal}(k_n/k) \cong (\mathbb{Z}/p^n).$$

このとき, 合併体

$$K := \cup_n k_n$$

は k 上の無限次 Galois 拡大になるが, その Galois 群は

$$\mathrm{Gal}(K/k) = \varprojlim_n \mathrm{Gal}(k_n/k) \cong \varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n) \cong \mathbb{Z}_p$$

($\mathbb{Z}_p$ は p 進整数環, 加法群として考える) となるので, K を k の $\mathbb{Z}_p$-拡大という.

重要な例として, 次がある. 今, 簡単のために p を奇素数とする. ζ_{p^n} を 1 の 原始 p^n 乗根とし, $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ を $\mathbb{Q}$ に ζ_{p^n} を附加した体とすると,

$$\mathbb{Q}(\zeta_p) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{p^2}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{p^3}) \subset \cdots \subset \mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}}) \subset \cdots$$

であり, $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}) := \cup \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ は $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の $\mathbb{Z}_p$-拡大である.

また, $\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}})$ の部分体 $\mathbb{Q}_n$ で, $\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}$ が p^n 次巡回拡大であるようなものが唯一つ存在する. すると

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_0 \subset \mathbb{Q}_1 \subset \mathbb{Q}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{Q}_n \subset \cdots$$

であり,

$$\mathbb{Q}_\infty := \cup \mathbb{Q}_n$$

は $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}_p$-拡大となる.

更に, 代数体 k に対し, 合成体

$$k_\infty := k\mathbb{Q}_\infty$$

は k の $\mathbb{Z}_p$-拡大となる. 但し, k と $\mathbb{Q}_\infty$ は同じ代数閉体 $\overline{\mathbb{Q}}$ に入っているものと考える.

この特別な $\mathbb{Z}_p$-拡大 k_∞ を k の "円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大" と呼ぶ. $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ は $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大である.

($p = 2$ のときも円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大はあるが, 説明は略す.)

2. 岩澤類数公式と $\mathbb{Z}_p[[T]]$

k を有限次代数体, p を素数とする.

K を k の $\mathbb{Z}_p$-拡大とし, k_n を n 番目の中間体 ($k \subset k_n \subset K$ で $[k_n : k] = p^n$ となるもの) とする. $\mathrm{Cl}(k_n)$ を k_n のイデアル類群とし, A_n を $\mathrm{Cl}(k_n)$ の p-Sylow 部分群とする:

$$A_n := \mathrm{Cl}(k_n)[p^\infty].$$

岩澤類数公式とは次である. 岩澤がこれを示したのは 1950 年代末頃の事である.

定理 (岩澤)**.** ある整数 $\lambda = \lambda_p(K/k), \mu = \mu_p(K/k), \nu = \nu_p(K/k)$ が存在して, 十分大なる全ての n に対し,

$$\sharp A_n = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}.$$

藤崎は [Fun] で次のように書いている: "岩澤類数公式は非常に独創的な理論の一つの体現化ということもありますが, 形式的に見ても, 虚 2 次体の場合 (この場合には都合のいいことがある) を除けば, ある系列の代数体の類数 (の p 部分) を具体的に記述する最初のそして現在唯一の公式です. "

この定理を証明するのに, 次のような視点が大事である.

$$\Gamma_n := \mathrm{Gal}(k_n/k),\ \ \Gamma := \mathrm{Gal}(K/k) \cong \varprojlim \mathrm{Gal}(k_n/k)$$

とおく. 各 A_n には Γ_n, 従って群環 $\mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$ が作用している. ここで, ノルムによる逆極限

$$X(K/k) := \varprojlim_n A_n$$

(逆極限はノルムでとる) を考えると, これには逆極限

$$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] := \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$$

(逆極限は自然な全射 $\Gamma_{n+1} \to \Gamma_n$ でとる) が作用することになる. この $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ が非常にいい環で, Γ の (位相的) 生成元 γ を一つ固定することにより,

(1)
$$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \overset{\sim}{\to} \mathbb{Z}_p[[T]]$$

という環同型が, $\gamma \mapsto T + 1$ という写像により存在する (Serre による). ここで,

$$\Lambda := \mathbb{Z}_p[[T]]$$

は $\mathbb{Z}_p$-係数の一変数巾級数環とする. 定理を示す手順は次の通りである.

1. 自然な写像

$$X(K/k) \to A_n$$

は十分大な n で全射であるが, そのような n を動かしたときの, kernel の変化を統一的に記述する. 具体的には, $m > n$ について kernel を Y_m, Y_n と書くと,

$$Y_m = (\omega_m/\omega_n)Y_n$$

である. 但し,

$$\omega_n := (1+T)^{p^n} - 1 \in \Lambda$$

とおく. (証明には類体論を用いる.)

2. 1. により, $X(K/k)$ は有限生成ねじれ Λ-加群であることを示す.

3. 有限生成ねじれ Λ-加群の構造定理 (下を参照) と, 1. を用いて, 岩澤類数公式を示す.

ここで, 有限生成ねじれ Λ-加群の構造定理が鍵となるが, それは次のようなものである:

定理. M を 有限生成ねじれ Λ-加群とする. このとき, ある $f_i \in \Lambda$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ たちが存在して, Λ-加群としての写像

$$M \to \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda / f_i \Lambda$$

で, kernel と cokernel が共に有限群となるものが存在する.

つまり, Λ は PID ではないのだが, 加群についてはそれに近い性質があるということである.

また, M の不変量の 1 つである特性イデアルを次のように定義する.

定義. 有限生成ねじれ Λ-加群 M に対し, その特性イデアルを Λ の単項イデアル

$$\mathrm{Char}(M) := \left(\prod_{i=1}^{n} f_i \right)$$

と定義する. 但し f_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ は上の構造定理に出て来るものと同じものとする. $\mathrm{Char}(M)$ は M のみによる.

岩澤類数公式における不変量 λ と μ は, $\mathrm{Char}(X(K/k))$ (あるいはその生成元 $\prod_{i=1}^{n} f_i$) の情報から取り出すことができる (ν は誤差項).

3. 問題, 予想など

岩澤類数公式は非常に美しい形をしているが, 具体的に与えられた k, p, K に対し $\lambda_p(K/k)$, $\mu_p(K/k)$ などを計算することは, 非常に困難である. 下から順に類数を計算していっても, 定理は "十分大な" としか言っておらず, いつ定常的になるかは保証していないからである. 実際, 特別な k (と p, K) を除いては, これらの不変量 (あるいは $\mathrm{Char}(X(K/k))$) を計算する方法は, 現在のところ原理的にすら知られていない.

(例えば $\mathbb{Q}$ の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大の場合, 全ての p について $\lambda_p(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) = \mu_p(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) = \nu_p(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) = 0$ であることは知られている.)

岩澤理論では円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大がもっとも重要であるが, この場合, 大きな予想としては次のようなものがある. 代数体 k に対し, k_∞ を円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする.

1. $\mu(k_\infty/k) = 0$:

ここでは詳述しないが, 岩澤理論の一つの見方として, 代数曲線との類似ということがあり, それによれば, $X(k_\infty/k)$ は, 代数閉体上の曲線 C のヤコビアンの Tate 加群

$$\varprojlim(\mathrm{Jac}(C)[p^n]) \cong \mathbb{Z}_p^{2g} \quad (g \text{ は種数})$$

の類似と見ることができる. であれば $\mu(k_\infty/k) = 0$ であろうというのが予想である. このとき

$$X(k_\infty/k) \cong \mathbb{Z}_p^{\lambda} \oplus (\text{有限群})$$

となるからである. この予想は $k/\mathbb{Q}$ がアーベル拡大の時は, Ferrero-Washington により解決されている (1970 年代後半).

2. Greenberg 予想:

k が <u>総実</u> 代数体のとき, $\lambda_p(k_\infty/k) = \mu_p(k_\infty/k) = 0$ ではないかというもの. 言い換えれば A_n の位数が, n によらず有界であろうということである. 非常に強い主張であるが, なぜそうなるのかは良く分からない. もともと岩澤の Question から始まって, Greenberg が最初に組織的に研究した (1970 年代始め). 1980 年代半ばに, 福田-小松が再度取り上げ (Greenberg 予想の名付け親),

現在まで日本の数学者の貢献が大きい (福田, 小松, 田谷, 尾崎, 市村, 隅田, 栗原, 山本, 都地, 他). 現在のところ反例はないが, 知られている場合はそう多くはない. 与えられた総実アーベル体に対し, もし予想が正しければ確かめることのできるアルゴリズムが知られている (正しくなければ計算は止まらない).

4. 岩澤主予想: 2 次体の場合

岩澤理論が深みを増したのは, 解析的類数公式の代数化, 精密化, あるいは p 進化 (岩澤主予想) が発見されて以降のことである. これはその後, 様々な方向への一般化がなされた. 現在では, 岩澤理論という言葉は, “代数的対象” と “解析的対象” を結び付けるという数論の中心テーマの一つ (解析的類数公式, Birch Swinnerton-Dyer 予想, Bloch-Kato 予想など) に対する, “p 進的” なアプローチを指して使われることも多い. ここではその一端を, 2 次体の場合に限定して紹介する.

以下, $k=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m \in \mathbb{Z}$ とする. f を k の導手とする. また, k に対応する Dirichlet 指標 (Kronecker 指標) を χ と書く. 簡単のため, p は奇素数とする. k_∞ を k の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする.

4.1. 虚 2 次体と p 進 L 関数.

$m<0$ の場合であるが, λ などが決定できる数少ない場合である. χ に対し, 巾級数

$$g_\chi(T) \in \Lambda(=\mathbb{Z}_p[[T]])$$

で, 次を満たすものが唯一つ存在する (久保田-Leopoldt-岩澤):
“$k \equiv 0 \mod (p-1)$ なる全ての負の整数 k に対し,

$$g_\chi((1+q)^k-1) = (1-\chi(p)p^{-k})L(k,\chi)$$

が成り立つ.” 但し $q = \mathrm{l.c.m}(f,p)$ とおく. ここで,

$$L(s,\chi)$$

は χ に対する Dirichlet の L 関数を表す. 負の整数 k について $L(k,\chi) \in \mathbb{Q}$ であることは良く知られている.

この $g_\chi(T)$ を用いて次が言える.

定理. (岩澤主予想, Mazur-Wiles, Thaine-Kolyvagin-Rubin)

$$\mathrm{Char}(X(k_\infty/k)) = (g_\chi(T)).$$

ここでは式 (1) の同型において Γ の生成元を適切に取らねばならないことを, 一言注意しておく.

岩澤は 1960 年代を通じこれを研究した. 岩澤主予想と名付け, また, 世界に岩澤理論の思想を広めたのは Coates だそうである. 証明されたのは 1980 年前後のことである (Mazur-Wiles).

上に見るように, 一方にイデアル類群という代数的なものがあり, 他方に L 関数という解析的な関数の特殊値を p 進的に補間したものがあって, 両者の不思議な関係というのが岩澤主予想の中身である.

もともと, 解析的類数公式の帰結として, 次は良く知られている.

$$\sharp\mathrm{Cl}(k) = wL(0,\chi)$$

(w は k の 1 の巾根の個数). 岩澤主予想はこれの精密化と見ることができる. 岩澤主予想の系として, 上の等式の p 巾部分が正しいことを示すこともできる.

$g_\chi(T)$ についてであるが,

$$L_p(s, \chi^{-1}\omega) := g_\chi((1+q)^s - 1)$$

$(s \in \mathbb{C}_p, |s|_p < 1)$ とおくとき, $L_p(s, \chi^{-1}\omega)$ は, 久保田-Leopoldt の p 進 L 関数とよばれる.

ここで詳しく述べる余裕はないが, 立場を逆にして p 進 L 関数の側から見ると, 岩澤主予想は, "Riemann zeta 関数が何かの作用素の行列式で書けるのではないか" という, Hilbert-Polya の問題の p 進類似版と見做すこともできる (Riemann zeta—p 進 L 関数, 作用素—$X(k_\infty/k)$ への Γ の生成元の作用).

4.2. **実 2 次体と円単数.** k が実 2 次体の時は, 虚 2 次体とは様子が異なる. この場合は上の定理のような定式化は出来ないが, 円単数を用いた別の定式化がある.

Dirichlet L 関数はこの場合, $s=0$ で 1 位の零点をもち, 次のような公式がある.

$$L'(0, \chi) = \frac{1}{2}\sum_a \chi(a) \log|1-\zeta_f^a|.$$

(ζ_f は 1 の原始 f 乗根, a は $(\mathbb{Z}/f)^\times$ を走る.) これと解析的類数公式を合わせて次を得る: ここでは話を簡単にするため, 導手 f は合成数であるとする.

$$\sharp\mathrm{Cl}(k) = [E_k : C_k] \times (2 \text{ の巾}). \tag{2}$$

但し, E_k は k の単数群とし, C_k は,

$$c := N_{\mathbb{Q}(\zeta_f)/k}(1-\zeta_f)$$

が生成する E_k の部分群とする ($N_{\mathbb{Q}(\zeta_f)/k}$ はノルムを表す). f が合成数と仮定したので, c は単数となる. このように 1 の巾根から作られた単数を "円単数" といい, C_k を "円単数群" という.

上の等式 (2) について, 高木は [Ta] p.273 において, "類数と単数の間の不思議な関係として, これは現今一つの驚異である" と書いている.

これが岩澤理論で代数化, p 進化される. E_n で k_n の単数群を表し, C_n を

$$c_n = N_{\mathbb{Q}(\zeta_{qp^n})/k_n}(1-\zeta_{qp^n})$$

が $\mathbb{Z}[\Gamma_n]$ 上生成する E_n の部分群とする (これも円単数群). 但し, $q = \mathrm{l.c.m}(f, p)$ とおく. すると,

$$(E_n/C_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$$

は $\mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$-加群である.

定理 (岩澤主予想, Mazur-Wiles, Thaine-Kolyvagin-Rubin)**.**

$$\mathrm{Char}(X(k_\infty/k)) = \mathrm{Char}(\varprojlim_n((E_n/C_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)).$$

ここで逆極限はノルムでとる.

これは虚 2 次体の主予想と見掛けはかなり異なるが, 実はほとんど "同値" と言ってよい命題である. その一つの表れとして, 円単数群から p 進 L 関数を構成することができることが挙げられる (Coleman 巾級数の理論, もともとは岩澤による).

この主予想の系として, 等式 (2) の p 巾部分を得ることができる. また, Greenberg 予想が正しければ, 上の定理の両辺の特性イデアルは共に Λ である.

5. 応用と一般化

岩澤主予想は, 代数体の K 群についての Lichtenbaum 予想の解決に使われた (Coates など, 70 年代以降).

また, 70 年代, イデアル類群の代わりに楕円曲線のセルマー群を扱う岩澤理論を, Mazur が研究した. 次いで Coates-Wiles による, CM 楕円曲線に対する Birch Swinnerton-Dyer 予想についての本質的な進歩があった (CM 楕円曲線の岩澤理論). 90 年代以降, p 進表現や Deformation の岩澤理論を, Greenberg, Perrin-Riou などが盛んに研究している. 楕円曲線の岩澤理論においても 90 年代, 加藤による本質的な進歩があった.

ここで述べた岩澤理論の範疇には入らないが, Wiles による谷山-志村予想の解決も, "岩澤理論的" であるといわれることもあり, また, 肥田あるいは Tilouine 等の仕事なども, 岩澤理論と近しい関係にある.

岩澤理論はこれからますます広がりと深みを増していくと思われる.

References

[Fun] "岩澤数学の全貌 その豊穣の世界", in 『数学の楽しみ』**15** 日本評論社 (1999).
[Ich] 市村文男: "岩澤理論入門 ", 東京都立大学セミナー報告 (1996).
[Ku] 黒川信重, 栗原将人, 斎藤毅: "数論 3", 岩波書店 (1998).
[La] Lang, S.: *"Cyclotomic Fields I and II"*, GTM **121**, Springer (1990).
[Na] 中島匠一: "岩澤主予想", in 『数学セミナー』1999 年 7 月号, 日本評論社 (1999).
[Su] 隅田浩樹: "久保田-Leopoldt の p 進 L 関数", 第 9 回整数論サマースクール報告集『ゼータ関数』(2001), 117–133.
[Ta] 高木貞治: "代数的整数論", 岩波書店.
[Wa] Washington, L. C.: *"Introduction to Cyclotomic Fields"*(2nd ed.), GTM **83**, Springer (1997).

e-mail: yhachi@math.gakushuin.ac.jp