岩澤理論の拡張

八森 祥隆 (学習院大理学部数学科)

1. 序

これまで見て来たように, 岩澤理論は非常に美しく, 完成された理論である. このような理論を拡張したり, あるいは応用すること, また, 数論の他の対象で類似のものを構築しようという試みは 1970 年前後から行なわれて来た. それらを列挙してみると[1],

(1) Dedekind ζ 関数の整数点での値と K 群の間の関係への応用 (Coates, Lichtenbaum, Sinnott, cf. [Co1], [CL], [CSi] 等).
(2) 総実代数体上の岩澤主予想 (Deligne, Ribet, Wiles, cf. [DR], [Wil] 等).
(3) Abel 多様体の有理点の $\mathbb{Z}_p$-拡大でのふるまい (Mazur, Schneider, Greenberg, cf. [Maz], [Sch], [GV] 等).
(4) CM 楕円曲線の BSD 予想への応用 (Coates, Wiles, Rubin, cf. [CW], [Ru] 等).
(5) motif や deformation の岩澤理論 (Greenberg, Coates, Perrin-Riou, Kato, Ochiai, cf. [Gr2], [Gr3], [CP], [Pe], [Ka2], [Oc2], [MTT] 等).
(6) anti-cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-拡大の岩澤理論 (Mazur, Hida, Tilouine, Bertolini, Darmon, cf. [HT], [BD] 等).
(7) $\mathbb{Z}_p^d$-拡大 (Greenberg, Cuoco, Monsky, McCallum, Ozaki, cf. [Gr1], [Mc], [Oz1] 等).
(8) p 進 Lie 拡大の岩澤理論 (Harris, Coates, Schneider, Sujatha, Venjakob, cf. [CSS], [Ve1] 等).
(9) ideal 類群のより精密な構造の記述 (Kurihara, Burns, Greither, Huber, Kings, cf. [Ku2], [BG], [HK] 等).
(10) $\mathbb{Z}_p$-拡大体上の非 Abel 最大不分岐 p-拡大 (Wingberg, Ozaki, cf. [Win], [Oz2] 等).

これらはそれぞれが全く別のものではなく, 互いに密接に関連しあっている.

この全てを紹介することは明らかに筆者の手に余ることであるので, この論説ではこのうちの一部を紹介することにとどめたい. ここでは特に, 岩澤理論の一つの大きな枠組である (5) の motif と deformation の岩澤理論を紹介し, それがどのようにこれまで展開して来た岩澤理論の一般化であるのかについて説明しようと思う.

ideal 類群は, Selmer 群, あるいは Tate-Shafarevich 群の一種であると考えることができる. 一方, Birch Swinnerton-Dyer 予想や Bloch-Kato 予想等は, より一般の Selmer 群と, 対応する L 関数の特殊値の間の関係を述べたものである. 従って, ideal 類群と L 関数の関係を記述する岩澤主予想は, そのような予想を考察するためのよい雛型を与えているともいえる.

そこで本稿では, まずどのように ideal 類群を Selmer 群ととらえるかについて説明し, 楕円曲線の Selmer 群との類似を見て, 一般の p 進表現に対する Selmer 群を導入する. そしてその $\mathbb{Z}_p$-拡大の岩澤理論をどのように考えるかを説明する. 更に, $\mathbb{Z}_p$-拡大を考えると

[1] ここに書くべき項目を忘れていたり, 分類の仕方や挙げるべき文献が適切でない場合があるかもしれません. 筆者の不勉強をお詫びします. なお, 数学者や文献は全く網羅的ではありません.

いうことが, いわば Galois 表現の "deformation (変形)" を考えていることにあたるということを説明する. 変形を考えることでもともとの対象物のことを知るという, しばしば数学に現れる文脈の中に岩澤理論もあるのである.

岩澤理論が今後どのようになっていくのか, それは筆者の力では到底語ることは不可能である. しかし, これまで開発されて来た岩澤理論の手法は, 一分野の特定の問題を解くための単なるテクニックには留まらず, 数論全体の新しい視界を切り開く哲学になりつつあると言っても過言ではないと思う. 世界の, そして日本の (筆者のような者には到底想像もつかない) 頭脳の集まって来た分野であり, これからますますその重要性が増して行くことを希望したい.

2. ideal 類群と Selmer 群

(1) ideal 類群

p を素数とし, k を有限次代数体, O_k をその整数環とする.

$$S_p(k) := \{x \otimes (1/p^n) \in k^\times \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p | \text{全ての有限素点 } v \text{ に対し}, p^n | \mathrm{ord}_v(x)\}$$

とおく. $x \otimes (1/p^n) \in S_p(k)$ に対して, $\displaystyle\sum_v \frac{\mathrm{ord}_v(x)}{p^n} v$ の, ideal 類群 $\mathrm{Cl}(k)$ での class を対応させることにより, $S_p(k)$ から $\mathrm{Cl}(k)[p^\infty]$ への全射が定義され, その核は $O_k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ である. 即ち, 完全列

$$0 \to O_k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to S_p(k) \to \mathrm{Cl}(k)[p^\infty] \to 0 \tag{2.1}$$

を得る. ここで, 解析的類数公式は次のようなものであった (木村氏の稿参照):

(i) $\mathrm{ord}_{s=0}\zeta_k(s) = \mathrm{corank}_{\mathbb{Z}_p} S_p(k) (=: r)$,

(ii) $\mathrm{Cl}(k)[p^\infty]$ は有限群,

(iii) $$\sharp \mathrm{Cl}(k)[p^\infty] = \left| \frac{-\sharp\mu_{p^\infty}(k) \lim_{s\to 0} s^{-r}\zeta_k(s)}{R_k} \right|_p^{-1} = \left| \frac{\sqrt{|d_k|}\sharp\mu_{p^\infty}(k) \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_k(s)}{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} R_k} \right|_p^{-1}.$$

但し ζ_k は Dedekind ζ 関数, R_k は単数基準, d_k は判別式, $|*|_p$ は正規化された p 進付値を表す.

これらを Galois cohomology の言葉に書き直す. 素点 v に対して, $U(k_v)$ で k_v の単数群 (v が有限素点の時), あるいは $k_v^\times$ (v が無限素点の時) を表す. Kummer 完全列により

$$k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \cong H^1(k, \mu_{p^\infty}), \quad k_v^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \cong H^1(k_v, \mu_{p^\infty})$$

であったから,

$$S_p(k) \cong \mathrm{Ker}\left(H^1(k, \mu_{p^\infty}) \to \bigoplus_v \frac{H^1(k_v, \mu_{p^\infty})}{U(k_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \right) \tag{2.2}$$

となることが分かる. 従って

$$\mathrm{Cl}(k)[p^\infty] \cong \mathrm{Ker}\left(\frac{H^1(k,\mu_{p^\infty})}{O_k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \to \bigoplus_v \frac{H^1(k_v,\mu_{p^\infty})}{U(k_v)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}\right) \tag{2.3}$$

となる.

(2) 楕円曲線の Selmer 群

次に E を 代数体 k 上定義された楕円曲線とする. Kummer 完全列より,

$$E(k)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \subset H^1(k,E[p^\infty]),\ \ E(k_v)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \subset H^1(k_v,E[p^\infty])$$

であることが言えるので, Selmer 群を

$$\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/k) := \mathrm{Ker}\left(H^1(k,E[p^\infty]) \to \bigoplus_v \frac{H^1(k_v,E[p^\infty])}{E(k_v)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}\right), \tag{2.4}$$

Tate-Shafarevich 群を

$$\mathrm{III}(E/k)[p^\infty] := \mathrm{Ker}\left(\frac{H^1(k,E[p^\infty])}{E(k)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \to \bigoplus_v \frac{H^1(k_v,E[p^\infty])}{E(k_v)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}\right) \tag{2.5}$$

と定義する. すると,

$$0 \to E(k)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/k) \to \mathrm{III}(E/k)[p^\infty] \to 0 \tag{2.6}$$

が完全列となる. Birch Swinnerton-Dyer 予想は次のように書かれる (cf. [MTT] §10, [Man] §8.4, 松野氏の稿も参照):

(i) $\mathrm{ord}_{s=1}L(E/k,s) = \mathrm{corank}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/k)(=: r)$,

(ii) $\mathrm{III}(E/k)[p^\infty]$ は有限,

(iii) $\sharp\mathrm{III}(E/k)[p^\infty] = \left|\dfrac{\sqrt{|d_k|}(\sharp E(k)[p^\infty])^2 \lim_{s\to 1}(s-1)^{-r}L(E/k,s)}{2^{r_2}R(E/k)} \times \dfrac{1}{\prod_v c_v(E/k)}\right|_p^{-1}.$

但し $R(E/k)$ は Néron-Tate の height, $c_v(E/k)$ は "玉河因子" とする. L 関数の解析接続性, 右辺の $|*|_p$ の中身の代数性も一般にはまだ予想である.

ideal 類群との類似を見ると, μ_{p^∞} と E_{p^∞} , $O_k^\times$ と $E(k)$, $U(k_v)$ と $E(k_v)$ が対応していると見れば, (2.2) と (2.4), (2.3) と (2.5), (2.1) と (2.6) が対応していて, $S_p(k)$ と $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/k)$, $\mathrm{Cl}(k)$ と $\mathrm{III}(E/k)$ が互いの類似物と考えられる.

3. Galois 表現の Selmer 群

(1) Galois 表現の Selmer 群

p を素数, k を代数体とする. §2 で見たように, Selmer 群は $H^1(k,\mu_{p^\infty})$ や $H^1(k,E_{p^\infty})$ の部分群として定義される. つまり, μ_{p^∞} や E_{p^∞} のような Galois 加群が大事である. そこで, 一般の Selmer 群を次のように定義しよう:

A を discrete な Abel 群として $A \cong (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^d$ であり, $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ が連続に作用しているものとする. 更にその作用は, p 上の素点と無限素点を全て含む k の素点の有限集合 S の外不分岐であるとする. k の各素点 v に対し, 部分加群

$$L_v \subset H^1(k_v, A)$$

を選ぶ. 但し, $v \notin S$ ならば,

$$L_v = H^1(k_v^{\mathrm{ur}}/k_v, A)$$

とする. $\mathfrak{L} := (L_v)_v$ に対し, Selmer 群を次のように定義する:

$$\mathrm{Sel}_{p^\infty}(k, A, \mathfrak{L}) := \mathrm{Ker}\left(H^1(k, A) \to \bigoplus_v \frac{H^1(k_v, A)}{L_v}\right). \tag{3.1}$$

特に A として "よい Galois 表現" を考え, 局所条件 $\mathfrak{L} = (L_v)_v$ を適切に定義すれば, 表現に対応する L 関数と, 上のような Selmer 群の間に関係ができるだろうというのが, 次に述べる Bloch-Kato 予想である.

(2) Bloch-Kato の Selmer 群

この項は [BK], [FP] を参照. 簡単のため p を 奇素数 とする. よい Galois 表現というのは例えば, 非特異完備代数多様体 X/k の étale cohomology の n-Tate twist

$$V = H^i_{\text{ét}}(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_p)(n)$$

である. これは有限次元 $\mathbb{Q}_p$-vector 空間で, $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ が連続に作用している. V はいわゆる motif

$$M := H^i(X)(n)$$

の p 進 realization と呼ばれるものである.

V の $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-stable な $\mathbb{Z}_p$-lattice T をとり $A := V/T$ とおく. この A が (1) で考えた Galois 加群の条件を満たすものである. そこで, 適切な A の Selmer 群を定義したい.

まず $H^1_f(k_v, V) \subset H^1(k_v, V)$ を,

$$H^1_f(k_v, V) := \begin{cases} \mathrm{Ker}\left(H^1(k_v, V) \to H^1(k_v^{\mathrm{ur}}, V)\right) & (v \nmid p \text{ のとき}) \\ \mathrm{Ker}\left(H^1(k_v, V) \to H^1(k_v, B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\right) & (v | p \text{ のとき}) \end{cases}$$

として定義する. 但し B_{cris} は Fontaine の p 進周期の環とする. $H^1_f(k_v, A) \subset H^1(k_v, A)$ を, $H^1(k_v, V) \to H^1(k_v, A)$ による $H^1_f(k_v, V)$ の像とする. Selmer 群 $H^1_f(k, A)$ を次で定義する:

$$H^1_f(k, A) := \mathrm{Ker}\left(H^1(k, A) \to \bigoplus_v \frac{H^1(k_v, A)}{H^1_f(k_v, A)}\right).$$

これは (3.1) で局所条件を $L_v = H^1_f(k_v, A)$ としたものである.

motif M に対し, §2 (1) における $O_k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, (2) における $E(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ に類似する $\mathbb{Q}$-vector 空間 Φ と射

$$r : \Phi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \to H^1_f(k, V)$$

が定義される (cf. [BK] §5 pp.374–375, [Ka1] §2). $\mathrm{Im}(\Phi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ で, $H^1(k,V) \to H^1(k,A)$ による $r(\Phi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ の像 ($\subset H^1_f(k,A)$) とする. Tate-Shafarevich 群を次のように定義する:

$$\mathrm{III}(A)[p^\infty] := \mathrm{Ker}\left(\frac{H^1(k,A)}{\mathrm{Im}(\Phi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)} \to \bigoplus_v \frac{H^1(k_v,A)}{H^1_f(k_v,A)}\right).$$

すると次が完全である ((2.1), (2.6) の類似):

$$0 \to \mathrm{Im}(\Phi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p) \to H^1_f(k,A) \to \mathrm{III}(A)[p^\infty] \to 0.$$

V とその lattice T, $A = V/T$ に対して新しい表現 (Kummer dual) を

(3.2) $\quad V^*(1) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V,\mathbb{Q}_p)(1),\ T^*(1) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T,\mathbb{Z}_p)(1),\ A^*(1) := V^*(1)/T^*(1)$

と定義する (但し $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V,\mathbb{Q}_p)$ には $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ が $(\sigma f)(v) := f(\sigma^{-1}v)$ で作用する). $V^*(1)$ もよい表現である. 即ち, V が $M = H^i(X)(n)$ の表現なら $V^*(1)$ は

$$M^*(1) := H^{2d-i}(X)(1+d-n)$$

という motif の表現である ($d = \dim(X)$). そこで,

$$L(V,s),\ \ L(V^*(1),s)$$

で, V, $V^*(1)$ に対して定義される標準的な L 関数を表す (cf. [BK] p.372, [FP] Chap. II §3.4.2, [CP] p.35. [Ka3] も参照). ここでは "geometric Frobenius" を用いて定義するものを採用する. また, L 関数についての一般的な予想 (解析接続等) は全て仮定することにする.

Bloch-Kato (+Beilinson, Tate) 予想は次のように書かれる:

(i) (cf. [FP] Chap. II Conjectures 3.4.5).

$$\mathrm{ord}_{s=0} L(V^*(1),s) = \mathrm{corank}_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(k,A) - \mathrm{corank}_{\mathbb{Z}_p} H^0(k,A).$$

(ii) $\mathrm{III}(A)[p^\infty]$ は有限.

(iii) (cf. [BK] Conjecture 5.15 + p.382). 簡単のため $k = \mathbb{Q}$ の場合のみ述べる.
$r := \mathrm{ord}_{s=0} L(V,s)$ とおくと,

$$\sharp\mathrm{III}(A)[p^\infty] = \left|\frac{w(A)\lim_{s\to 0} s^{-r} L(V,s)}{R_V} \times \frac{1}{\prod_v c_v(A)}\right|_p^{-1}.$$

ここで R_V は Beilinson-Bloch の height を表す. 但し V の weight によってはこの項は不要 ($R_V = 1$ とおく) な場合もある. $c_v(A)$ については詳しく説明しないが, 有限素点のときは, [BK] の意味の玉河数を "v での local L-因子の $s=0$ での値" で割ったもの, 無限素点では "周期" を表す. また,

$$w(A) := \sharp H^0(\mathbb{Q},A),\ \sharp H^0(\mathbb{Q},A^*(1))\ \ \text{または}\ \ \sharp H^0(\mathbb{Q},A) \times \sharp H^0(\mathbb{Q},A^*(1))$$

で, これも V により異なる.

例を挙げよう. まず

$$V = \mathbb{Q}_p(1),\ T = \mathbb{Z}_p(1)$$

を考える. $A \cong \mu_{p^\infty}$ である. V は $M = H^0(\mathrm{Spec}(k))(1)$ という motif の p 進表現である. このとき全ての v で $H^1_f(k_v, \mu_{p^\infty}) \cong U(k_v) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ となることが示される. 従って

$$H^1_f(k, \mu_{p^\infty}) \cong S_p(k)$$

である. また, $\mathrm{Im}(\Phi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p) \cong O_k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ であり, $\text{Ш}(\mu_{p^\infty})[p^\infty] \cong \mathrm{Cl}(k)[p^\infty]$ となる. つまり §2 (1) の状況に等しいので, 解析的類数公式がこの場合の Bloch-Kato 予想である. ここで

$$L(V, s) = \zeta_k(s+1),\ L(V^*(1), s) = \zeta_k(s)$$

であることに注意する. つまり §2 (1) の (iii) の 2 番目の等式が上の (iii) に等しい.

次に, この V の Kummer dual の表現

$$V^*(1) = \mathbb{Q}_p,\ T^*(1) = \mathbb{Z}_p,\ A^*(1) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

について考える. このとき全ての v で $H^1_f(k_v, A^*(1)) = H^1(k_v^{\mathrm{ur}}/k_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ となることが示されるので, $H^1_f(k, A^*(1)) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(H_k/k), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ となる. 但し, H_k は k の p-Hilbert 類体を表す. 従って, 類体論により,

$$H^1_f(k, A^*(1)) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}(k)[p^\infty], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

となる. ideal 類群を Selmer 群と見ることも出来るというのはこの意味である. また, $\mathrm{Im}(\Phi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p) = 0$ であり,

$$\text{Ш}(A^*(1))[p^\infty] = \text{Ш}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[p^\infty] \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}(k)[p^\infty], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

である. 故に解析的類数公式の (iii) の 1 番目の等式がこの場合の Bloch-Kato 予想 の (iii) と同等である.

最後に E/k を楕円曲線とし, $T_p(E) := \varprojlim E_{p^n}$, $V_p(E) := T_p(E) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とおく.

$$V_p(E) \cong H^1_{\text{ét}}(E \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_p)(1)$$

であり, $V_p(E)/T_p(E) \cong E_{p^\infty}$ である. $H^1_f(k_v, E_{p^\infty}) \cong E(k_v) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ が証明できるので,

$$H^1_f(k, E_{p^\infty}) = \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/k) \tag{3.3}$$

となる. 従って §2 (2) の Birch Swinnerton-Dyer 予想が E_{p^∞} についての Bloch-Kato 予想である. 但しここで,

$$L(V_p(E), s) = L(E/k, s+1),\ V_p(E) \cong V_p(E)^*(1)$$

であることを注意しておく.

4. 円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大と岩澤主予想

p を奇素数とする．この章以降, $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{C}$ と $\overline{\mathbb{Q}_p}$ への埋め込みをそれぞれ一つずつ固定しておくことにする．

(1) $\mathbb{Q}_p(1)$-case

$k = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, $k_n = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$, $k_\infty = \mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ とおく．$S_p(k_n)$ を (2.2) で定義した群とし, restriction map による自然な順極限で

$$S_p(k_\infty) := \varinjlim_n S_p(k_n)$$

と定義する．これには $\Gamma := \mathrm{Gal}(k_\infty/k)$ が作用する．(2.1) により

$$0 \to O_{k_\infty}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to S_p(k_\infty) \to \varinjlim_n \mathrm{Cl}(k_n)[p^\infty] \to 0 \tag{4.1}$$

が完全である．また,

$$S_p(k_\infty) \cong \mathrm{Ker}\left(H^1(k_\infty, \mu_{p^\infty}) \to \prod_w \frac{H^1(k_{\infty,w}, \mu_{p^\infty})}{U(k_{\infty,w}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \right) \tag{4.2}$$

でもある．$S_p(k_\infty)$ の Pontrjagin dual を

$$S_p(k_\infty)^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(S_p(k_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

と書き, $\gamma \in \Gamma$ の作用を $(\gamma f)(x) := f(\gamma^{-1}x)$ により定めることで, $S_p(k_\infty)^\vee$ には compact $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-加群の構造が入る．いつものように, Γ の生成元 γ_0 を固定して, 同型

$$\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p[[T]] \tag{4.3}$$

を $\gamma_0 \mapsto T+1$ により定め, 同一視する．

$S_p(k_\infty)$ には $\Delta := \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ も作用し, Γ の作用と可換である．Δ の指標 χ に対し, Δ-加群 N の χ-part を N^χ と書く．次は今まで学んできたことの言い換えに過ぎない．

<u>岩澤主予想</u>:
χ を $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ の 奇指標で, 簡単のため Teichmuller 指標 ω でないものとする．

$$\mathrm{char}_\Lambda(S_p(k_\infty)^{\chi\vee}) = (F_\chi(T)) \tag{4.4}$$

である．ここで, $F_\chi \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ は $F_\chi(\kappa(\gamma_0)^s - 1) = L_p(\chi^{-1}\omega, -s)$ となるものである (κ は円分指標, $L_p(\chi^{-1}\omega, s)$ は Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数)．

$F_\chi(T)$ は次の様なものとして特徴づけられる: $\mathbb{Q}_\infty$ を $\mathbb{Q}$ の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする．Γ と $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ を自然に同一視し, $\gamma_0 \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ とみなす．ϕ を 任意の $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ の有限位数の指標とする．ϕ はある m について conductor p^m の Dirichlet 指標と同一視される．このとき

$$F_\chi(\phi(\gamma_0) - 1) = -\frac{f_{\chi\phi^{-1}}}{\tau(\chi\phi^{-1})} \frac{1}{\sqrt{-1}\pi} L(\chi\phi^{-1}, 1) \tag{4.5}$$

となる．但し, $f_{\chi\phi^{-1}}$ は $\chi\phi^{-1}$ の conductor, $\tau(\chi\phi^{-1})$ はその Gauss 和である．

(4.4) を通常の岩澤主予想に帰着しておく. $w \nmid p$ のとき $U(k_{\infty,w}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = 0$, $w|p$ のとき $U(k_{\infty,w}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = k_{\infty,w}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ となることから, (4.2) は

$$S_{p^\infty}(k_\infty) \cong \mathrm{Ker}(H^1(k_\infty, \mu_{p^\infty}) \to \prod_{w \nmid p} H^1(k_{\infty,w}, \mu_{p^\infty})) \tag{4.6}$$

と書き換えられる. k_∞ 上では μ_{p^∞} は自明な加群なので,

$$S_p(k_\infty) \cong H^1(k_S/k_\infty, \mu_{p^\infty}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathfrak{X}(k_\infty), \mu_{p^\infty}) \tag{4.7}$$

を得る. ここで k_S は k_∞ の p の外不分岐最大拡大を表し, $\mathfrak{X}(k_\infty) := \mathrm{Gal}(k_S/k_\infty)^{\mathrm{ab}}$ とする. つまり (4.1) は尾崎氏の稿にでてきた完全列に他ならない. (4.7) より $S_p(k_\infty)^\vee \cong \mathfrak{X}(k_\infty)(-1)$ であることと, $\{S_p(k_\infty)^\chi\}^\vee \cong \{S_p(k_\infty)^\vee\}^{\chi^{-1}}$ であることに注意すれば, (4.4) は岩澤主予想の第二の定式化と同値である.

注意 4.1. χ が偶指標の時, 上の方法では岩澤主予想を定式化することができない. まず $(O_{k_\infty}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\chi$ は非常に大きくなるので, $S_p(k_\infty)^{\chi\vee}$ は Λ-torsion ではなくなる. 一方, (4.5) に類似する補間性質を満たす $F_\chi(T)$ は, 強いて言えば $F_\chi(\kappa(\gamma_0)^s - 1) = L_p(\chi^{-1}, -s)$ を満たす巾級数と考えられる (Leopoldt の類数公式, 詳細は略す). しかしこれは $S_{p^\infty}(k_\infty)^{\chi\vee}$ とはすぐには結び付かない. この理由の一つとして, $L(\chi\phi, s)$ が $s = 1$ で critical (§5 を見よ) でないためと考えられる. これはそこに岩澤理論がないと言っているのではなく, 別の定式化が必要であるということである (尾崎氏の稿も参照).

(2) <u>$V_p(E)$-case</u>

$E/\mathbb{Q}$ を楕円曲線とする. $\mathbb{Q}$ の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathbb{Q}_\infty$ に対し, $\mathbb{Q}_n$ を $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ の n 番目の中間体とする.

$$\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty) := \varinjlim_n \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_n)$$

とおくと,

$$\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty) \cong \mathrm{Ker}\left(H^1(\mathbb{Q}_\infty, E[p^\infty]) \to \prod_w \frac{H^1(\mathbb{Q}_{\infty,w}, E[p^\infty])}{E(\mathbb{Q}_{\infty,w}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}\right)$$

である. この Selmer 群に対して, 岩澤主予想がうまく定式化できるのは, E が p で good ordinary reduction をもつ場合である. このとき, $\tilde{E} := E \mod p$ とし,

$$a_p := 1 + p - \sharp\tilde{E}(\mathrm{F}_p)$$

とおくと, $a_p \not\equiv 0 \mod p$ となる. そこで α を $\mathbb{Z}_p^\times$ の元である唯一の $X^2 - a_p X + p = 0$ の解とする.

E の p 進 L 関数 $F_E(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ は次のように特徴づけられる (cf. [MTT] 等. [Ha] も参照): ϕ を $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ の有限位数で conductor p^m の指標とする. $L(E,s) = \sum_n a_n n^{-s}$ に対して, $L(E,\phi,s) := \sum_n \phi(n) a_n n^{-s}$ とおく. このとき,

$$F_E(\phi(\gamma_0) - 1) = \alpha^{-m}(1 - \phi(p)\alpha^{-1})(1 - \phi^{-1}(p)\alpha^{-1})\{\frac{f_{\phi^{-1}}}{\tau(\phi^{-1})}\frac{1}{\Omega_E} L(E, \phi^{-1}, 1)\} \tag{4.8}$$

となる．但し Ω_E は周期 (= 無限素点での玉河因子 $c_\infty(E/\mathbb{Q})$) を表す．次については松野氏の稿も参照のこと．これはまだ完全には解決されていない．

岩澤主予想: E は p で good ordinary reduction を持つとする．このとき Pontrjagin dual $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)^\vee$ は Λ-torsion で,

$$\mathrm{char}_\Lambda(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)^\vee) = (F_E(T)).$$

注意 4.2. E が p で good supersingular reduction を持つときはこの定式化ではうまく行かない．まず, $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)^\vee$ は Λ-torsion でない (cf. [Sch])．一方, (4.8) を満たす $F_E(T)$ が $\mathbb{Q}_p[[T]]$ の元として存在するが, Λ には入らない．しかし Selmer 群や $F_E(T)$ を modify することで岩澤主予想を定式化できる ([Ka2], [Ku1], [Ko], [Po] 参照)．

5. **Ordinary 表現の岩澤理論**

一般の Galois 表現に対しても岩澤理論を考えたい．しかし注意 4.1, 4.2 で説明したように, 表現が p で ordinary や $s=0$ で critical でない場合には, 今まで述べた定式化には障害がある．しかし, ordinary かつ critical ならば岩澤主予想が定式化され, 成り立つことが期待される．この章については [Gr2], [CP] を参照．

$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の表現 V を motif M の p 進 realization とする．以下, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ を, §4 の最初で固定した埋め込みに対応する $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の部分群と見る．$\mathbb{Q}_p$ の代数拡大 K の最大不分岐拡大を K^{ur} と書く．

V が p で potentially ordinary とは, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-部分加群の filtration

$$\cdots F^i(V) \supset F^{i+1}(V) \supset \cdots$$

で, 次を満たすものが存在することをいう: 十分小な i で $F^i(V) = V$, 十分大な i で $F^i(V) = 0$ となり, 更に $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 K が存在して, 惰性群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K^{\mathrm{ur}})$ 上の加群として

$$F^i(V)/F^{i+1}(V) \cong \mathbb{Q}_p(i)^{h_i}$$

$(h_i \geq 0)$ である．

V と $V^*(1)$ (あるいは M と $M^*(1)$) に対し, それらの無限 L-因子 (Γ-factor) と呼ばれるものがそれぞれ定義される (cf. [Gr2] §6, [CP] p.34)．V が $s=0$ で critical とは, それらが共に $s=0$ で正則になっていることを言う (cf. [CP] Definition 2.2)．

以下, V は p で potentially ordinary かつ $s=0$ で critical であるとする．

(1) Greenberg の Selmer 群

T を V の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-lattice とし, $A = V/T$ とおく．岩澤理論で問題となる Selmer 群は, これまでの文脈から

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(\mathbb{Q}_\infty, A) := \varinjlim_n H^1_f(\mathbb{Q}_n, A)$$

(Bloch-Kato の Selmer 群) を考えるのが自然である．しかし, 次のような Selmer 群が, 定義が容易であり, 岩澤主予想の定式化に適していると思われること, deformation による岩

澤理論 (§6 参照) を考える場合に便利であること等から, 導入しておく. 次を Greenberg の Selmer 群と呼ぶ:

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A) := \mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}_\infty, A) \to H^1(\mathbb{Q}^{\mathrm{ur}}_{\infty,\mathfrak{p}}, A/F^+(A)) \times \prod_{w \nmid p} H^1(\mathbb{Q}^{\mathrm{ur}}_{\infty,w}, A)).$$

ここで, $\mathfrak{p}$ は p 上にある $\mathbb{Q}_\infty$ の唯一の素点とする. また, $F^+(V) := F^1(V)$ とおき, $F^+(A)$ は $V \to A$ による $F^+(V)$ の像とする. 2 つの Selmer 群の間の関係については, 次が成り立つ:

命題 5.1 (Flach, Ochiai [Fl] Theorem 3, [Oc2] Proposition 4.1, 4.2)**.**

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(\mathbb{Q}_\infty, A) \subset \mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A)$$

であって cokernel の $\mathbb{Z}_p$-corank は有限である. 更に, いくつかのゆるやかな条件のもとで, cokernel は有限群になる.

$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A)$ には $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ が作用する. そこで Pontrjagin dual

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A)^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

は, $\gamma \in \Gamma$ の作用を

$$(\gamma f)(x) := f(\gamma^{-1}x) \tag{5.1}$$

と定めることで, compact $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-加群となる. 予想は次の通りである.

<u>予想</u>: V が $s=0$ で critical なら $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A)^\vee$ は Λ-torsion であろう.

注意 5.2. V が potentially ordinary であれば, $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A)$ は定義されることに注意する. $V^*(1)$, $A^*(1)$ を, (3.2) で定めた Kummer dual の表現とする. このとき, V が critical でなければ $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A)^\vee$ か $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A^*(1))^\vee$ のどちらかは Λ-torsion にならない (cf. [Gr2] Theorem 1). 一方, V が critical なら $V^*(1)$ もそうである. このとき $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A)^\vee$ と $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A^*(1))^\vee$ の Λ-torsion 性は同値である (cf. [Gr2] Theorem 2).

§4 で見た Selmer 群たちを Greenberg の Selmer 群の言葉に書き換えてみよう.
§4 (1) の $S_p(k_\infty)^{\chi^\vee}$ は次のように考えることができる. $K_{\chi^{-1}}$ で, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が χ^{-1} 倍で作用する 1 次元 $\mathbb{Q}_p$-vector 空間の Galois 表現を表す. これは χ^{-1} に付随する “Dirichlet motif” の p 進 realization である. 1 次元表現

$$W_{\chi^{-1}} := \mathbb{Q}_p(1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_{\chi^{-1}}$$

を考える. $T_{\chi^{-1}}$ をその lattice, $B_{\chi^{-1}} := W_{\chi^{-1}}/T_{\chi^{-1}}$ とおく. $W_{\chi^{-1}}$ の filtration を

$$F^i(W_{\chi^{-1}}) := \begin{cases} W_{\chi^{-1}} & (i \le 1), \\ 0 & (i \ge 2) \end{cases}$$

とおけば, $W_{\chi^{-1}}$ は p で potentially ordinary であることが分かる. Greenberg の Selmer 群は次のようになる:

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, B_{\chi^{-1}}) := \mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}_\infty, B_{\chi^{-1}}) \to \prod_{w \nmid p} H^1(\mathbb{Q}^{\mathrm{ur}}_{\infty,w}, B_{\chi^{-1}})).$$

restriction $H^1(\mathbb{Q}_\infty, B_{\chi^{-1}}) \to H^1(k_\infty, B_{\chi^{-1}})^{\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})}$ は同型であり,

$$H^1(k_\infty, B_{\chi^{-1}})^{\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})} \cong H^1(k_\infty, \mu_{p^\infty})^\chi$$

であること等と, (4.6) と組み合わせて, 次の Γ-同型を得る:

(5.2) $$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, B_{\chi^{-1}}) \cong S_p(k_\infty)^\chi.$$

またこの場合, 命題 5.1 より強く, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, B_{\chi^{-1}}) = \mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(\mathbb{Q}_\infty, B_{\chi^{-1}}).$$

$W_{\chi^{-1}}$ が $s=0$ で critical なのは χ が odd のときに限り, $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, B_{\chi^{-1}})$ が Λ-torsion なのもそのときに限る.

次に, §4 (2) の楕円曲線の場合であるが, $V_p(E)$ は常に $s=0$ で critical である. E が p で good ordinary とすると, filtration を

$$F^i(V_p(E)) = \begin{cases} V_p(E) & (i \leq 0), \\ \mathrm{Ker}(V_p(E) \to V_p(\tilde{E})) & (i = 1), \\ 0 & (i \geq 2) \end{cases}$$

とおくことで, $V_p(E)$ は上の意味での potentially ordinary であることが知られている (cf. [Gr2] §2). 但し, $\tilde{E} = E \mod p$ とする. また, 命題 5.1 より強く

(5.3) $$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, E_{p^\infty}) = \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)\ (= \mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(\mathbb{Q}_\infty, E_{p^\infty}))$$

となることも知られている (cf. [Gr2] §2. [Gr5] §2 も参照. 2 番目の等式は (3.3) による).

(2) <u>p 進 L 関数</u>

$\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ の有限位数の指標 ϕ に対し, K_ϕ という記号で, $\mathbb{Q}_p$ に ϕ の値を全て附加した体で, その上に $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が ϕ 倍によって作用する Galois 表現を表すことにする.

$A = V/T$ の p 進 L 関数

$$F_A(T) = \frac{G_A(T)}{H_A(T)} \quad (G_A(T), H_A(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]])$$

は次のように特徴づけられると期待される (cf. [CP] p.49, [Gr2] p.101).

<u>p 進 L 関数の存在予想</u>: Γ の生成元 γ_0 を固定する. Γ の任意の有限位数の指標 ϕ に対し, V を ϕ でひねった Galois 表現を

$$V_\phi := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_\phi$$

と表す. $L(V_\phi, s)$ を V_ϕ の L 関数とする. このとき,

(5.4) $$F_A(\phi(\gamma_0) - 1) = \alpha_\phi L(V_\phi, 0)$$

となる. 但し $\alpha_\phi \in \mathbb{C}$ で, A と ϕ に依存する explicit に書ける量であり, $\alpha_\phi L(V_\phi, 0) \in \overline{\mathbb{Q}}$ でなければならない. ここで $\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ は, 最初に固定した埋め込みをとっている.

ここでも, §4 で見た p 進 L 関数たちを, 上の形に書き換えてみよう.

§4 (1) の場合: odd な χ に対して, $W_{\chi^{-1}}$ を ϕ でひねった Galois 表現

$$(W_{\chi^{-1}})_\phi := W_{\chi^{-1}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_\phi$$

を考えると,

$$L((W_{\chi^{-1}})_\phi, s) = L(\chi\phi^{-1}, s+1)$$

である (motif の L 関数は geometric Frobenius でとることに注意). そこで, $F_{B_{\chi^{-1}}}(T) := F_\chi(T)$ ととれば, (4.5) により補間性質は次のようになり, (5.4) に合致する:

$$F_{B_{\chi^{-1}}}(\phi(\gamma_0)-1) = -\frac{f_{\chi\phi^{-1}}}{\tau(\chi\phi^{-1})}\frac{1}{\sqrt{-1}\pi}L((W_{\chi^{-1}})_\phi, 0).$$

§4 (1) の場合: ϕ でひねった Galois 表現

$$V_p(E)_\phi := V_p(E) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_\phi$$

に対して, $L(V_p(E)_\phi, s) = L(E, \phi^{-1}, s+1)$ である. 従って p で good ordinary のとき, $F_{E_{p^\infty}}(T) := F_E(T)$ ととれば, 補間性質は (4.8) より

$$F_{E_{p^\infty}}(\phi(\gamma_0)-1) = \alpha^{-m}(1-\phi(p)\alpha^{-1})(1-\phi^{-1}(p)\alpha^{-1})\frac{f_{\phi^{-1}}}{\tau(\phi^{-1})}\frac{1}{\Omega_E}L(V_p(E)_\phi, 0)$$

となる. α も代数的数であることに注意すれば, やはり (5.4) に合致する.

(3) 岩澤主予想

そこで, 岩澤主予想は次のように定式化される. 再び, (4.3) による同型 $\Lambda \cong \mathbb{Z}_p[[T]]$ によって両者を同一視する.

岩澤主予想: V は p で potentially ordinary かつ $s=0$ で critical とする. ここでは簡単のため, $H^0(\mathbb{Q}_\infty, A)$ と $H^0(\mathbb{Q}_\infty, A^*(1))$ は共に有限であると仮定する. このとき,

$$F_A(T) \in \Lambda$$

(即ち $H_A(T) = 1$) である. 更に, $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A)^\vee$ は Λ-torsion で

$$\mathrm{char}_\Lambda(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A)^\vee) = (F_A(T))$$

が成り立つ.

§4 (1) の場合, (5.2) により, 岩澤主予想 (4.4) は次のように言い換えられた:

$$\mathrm{char}_\Lambda(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, B_{\chi^{-1}})^\vee) = (F_{B_{\chi^{-1}}}(T)).$$

§4 (2) の場合, (5.3) により,

$$\mathrm{char}_\Lambda(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, E_{p^\infty})^\vee) = (F_{E_{p^\infty}}(T))$$

と言い換えられる.

注意 5.3. 主予想において, 一般に $\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}$ より $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}$ をとったほうがよいという根拠については [Gr2] §2 p.108, [Gr4] 等参照 (“trivial zero” の問題).

注意 5.4. ここでは potentially ordinary として話を進めてきたが, より広く "Panchishkin 条件" を満たす表現ならば $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_\infty, A)$ を定義することが出来る (cf. [Gr3] §3). 更に critical ならば同様に岩澤主予想を定式化することが出来る.

注意 5.5. ordinary や critical でない場合も含めた岩澤主予想の定式化の一つとしては, [Ka1], [Ka2] 等を参照のこと.

6. Deformation の岩澤理論

この節については [Gr3], [Oc2] 参照.

(1) cyclotomic deformation

V を potentially ordinary かつ $s=0$ で critical な $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の p 進表現とし, T をその $G_{\mathbb{Q}}$-stable な lattice, $A = V/T$ とおく. V の filtration を $\{F^i(V)\}_i$, $F^+(V) := F^1(V)$ とおく.

§5 (2) で見た V の p 進 L 関数は, $\Gamma := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ の有限指標 ϕ に対し,

$$V_\phi := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_\phi$$

という表現の L 関数を考え, ϕ を動かすときの $s=0$ での値を補間して出来るものであった. そこで, Selmer 群もこれに対応した, 大きな Galois 表現の言葉で定義されることが期待される.

まず,

$$\tilde{\kappa} : G_{\mathbb{Q}} \to \Lambda^\times$$

を $G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \Gamma$ と自然な包含 $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]^\times \cong \mathbb{Z}_p[[T]]^\times$ の合成とする. $\Lambda(\tilde{\kappa})$ で, rank 1 の自由 Λ-加群で, $G_{\mathbb{Q}}$ が $\tilde{\kappa}$ 倍で作用する加群を表す. ϕ を Γ の有限指標とすると, 自然に環準同型 $\phi : \Lambda \to \overline{\mathbb{Q}_p}$ が誘導されるが, その kernel である Λ の ideal を P_ϕ と置くと, $G_{\mathbb{Q}}$-加群として,

$$(\Lambda(\tilde{\kappa})/P_\phi) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong K_\phi$$

であり, $\Lambda(\tilde{\kappa})/P_\phi$ はその lattice となることが分かる. 即ち, $\Lambda(\tilde{\kappa})$ は ϕ を動かす時の K_ϕ という表現たちを補間する大きな表現と言える. そこで,

$$\tilde{T} := T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(\tilde{\kappa})$$

とおき, $G_{\mathbb{Q}}$ を対角的に作用させる. $\tilde{T}$ は rank $d = \dim V$ の自由 Λ 加群であり,

$$(\tilde{T}/P_\phi) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong V_\phi \tag{6.1}$$

であるような, V_ϕ たちを補間する $G_{\mathbb{Q}}$ の大きな Galois 表現である. 特に $\phi = 1$ の時, $(\tilde{T}/P_1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong V$ であるので, $\tilde{T}$ を V の cyclotomic deformation (円分的変形) と言う. 更に,

$$\tilde{A} := \tilde{T} \otimes_\Lambda (\Lambda^\vee)$$

とおく. 但しここで, $\Lambda^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Lambda, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ とおき, $\lambda \in \Lambda$ と $f \in \Lambda^\vee$ について,

$$(\lambda f)(\mu) := f(\lambda\mu) \tag{6.2}$$

という作用で Λ-加群とみる. これには $G_{\mathbb{Q}}$ が自明に作用するものとし, $\tilde{T}$ への作用により $\tilde{A}$ を discrete な $G_{\mathbb{Q}}$-加群とみる. また, $F^+(T) := F^+(V) \cap T$, $F^+(\tilde{T}) := F^+(T) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(\tilde{\kappa})$ とおき,

$$F^+(\tilde{A}) := F^+(\tilde{T}) \otimes_{\Lambda} (\Lambda^{\vee}) \tag{6.3}$$

と定義する. $F^+(\tilde{A}) \subset \tilde{A}$ となり, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-部分加群である.

そこで Selmer 群を次のように定義する:

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \tilde{A}) := \mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}, \tilde{A}) \to H^1(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}, \tilde{A}/F^+(\tilde{A})) \times \prod_{l \neq p} H^1(\mathbb{Q}_l^{\mathrm{ur}}, \tilde{A})).$$

ここでは cohomology を $\mathbb{Q}$ 上で考えるかわりに, 係数に $\tilde{A}$ という大きな表現を用いたことが特徴である. これには Λ-加群としての構造が, $\tilde{A}$ への Λ の作用により誘導される. この Pontrjagin dual を

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \tilde{A})^{\vee} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \tilde{A}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

とおく. そして $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \tilde{A})^{\vee}$ への Λ の作用を, (6.2) と同様に

$$(\lambda f)(x) := f(\lambda x)$$

によって定義する. この作用は Γ の作用によって誘導される通常の Λ の作用 ((5.1) を見よ) と少し異なることに注意して欲しい. この Selmer 群と §5 で定義した Selmer 群との関係は次のようになる. 証明は Shapiro の補題を用いれば容易である. このことと, (6.1) を用いれば, §5 で定式化した岩澤主予想を全て $\tilde{T}$ の言葉で表すことができる.

命題 6.1. canonical な Λ-同型

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \tilde{A})^{\vee} \cong \mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_{\infty}, A)^{\vee}$$

が存在する. 但し Λ は, 左辺へは上のように, 右辺へは (5.1) のように作用するものとする.

(2) <u>deformation の岩澤理論</u>

上のことを踏まえ, 岩澤理論は以下のように一般化される.

R を Noether 局所整閉整域とし, その極大 ideal $\mathfrak{m}$ についての $\mathfrak{m}$-adic な位相により, R は compact $\mathbb{Z}_p$-algebra になっているとする. 整閉整域 R 上の有限生成 R-torsion 加群が pseudo-null とは, その annihilator ideal の height が 2 以上であることをいう. M を有限生成 R-torsion 加群とすると, ある R の height 1 の素イデアル $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots \mathcal{P}_n$ と $t_i \in \mathbb{Z}$ が存在して, R-準同型

$$M \to \oplus_{i=1}^{n} R/\mathcal{P}_i^{t_i} \tag{6.4}$$

で kernel, cokernel が pseudo-null になるものが存在する (cf. [NSW] Proposition 5.1.7, 伊藤氏の稿も参照). そこで, M の characteristic ideal を

$$\mathrm{char}_R(M) := \prod_i \mathcal{P}_i^{t_i}$$

と定めると, これは上の準同型のとり方によらない.

$\mathcal{T}$ を有限生成自由 R-加群で, $G_{\mathbb{Q}}$ が連続に作用して R の作用と可換なものとする. 更に, $\mathcal{T}$ の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-部分加群 $F^+(\mathcal{T})$ と, 連続環準同型 (specialization map) の族

$$\{\psi_j : R \to \overline{\mathbb{Q}_p}\}_j$$

が与えられていて次を満たすとする:

(i) $P_{\psi_j} := \mathrm{Ker}(\psi_j)$ とおくとき, $\cap_j P_{\psi_j} = 0$.

(ii) $V_{\psi_j} := (\mathcal{T}/P_{\psi_j}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とおくと, V_{ψ_j} は motif から来るよい p 進表現であり, potentially ordinary かつ $s = 0$ で critical.

(iii) $(F^+(\mathcal{T})/P_{\psi_j}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = F^+(V_{\psi_j})$ である.

言うまでもなく cyclotomic deformation はこの特別な場合である. $R = \Lambda$, $\mathcal{T} = \tilde{T}$ で, specialization の族として Γ の有限指標 ϕ たちから誘導される環準同型全体をとればよい. V が critical なら V_ϕ もそうである.

一般の $(R, \mathcal{T})$ に対して, Selmer 群は次のように定義される:

$$\mathcal{A} := \mathcal{T} \otimes_R (R^\vee) \tag{6.5}$$

とおく. ここで $R^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(R, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ は $(rf)(s) := f(rs)$ $(r \in R,\ f \in R^\vee)$ という作用による R-加群である. $F^+(\mathcal{A}) := F^+(\mathcal{T}) \otimes_R (R^\vee)$ とおき, $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A})$ を次のように定める:

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}) := \mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{A}) \to H^1(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}, \mathcal{A}/F^+(\mathcal{A})) \times \prod_{l \neq p} H^1(\mathbb{Q}_l^{\mathrm{ur}}, \mathcal{A})).$$

これは R 加群となるので, Pontrjagin dual を $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A})^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ とおくと, これに $r \in R$ の作用を

$$(rf)(x) := f(rx)$$

として定義することで R-加群となる.

一方, p 進 L 関数として, 次のようなものの存在が予想される. $\mathcal{T}^*(1) := \mathrm{Hom}_R(\mathcal{T}, R)(1)$ に対し, (6.5) と同様に定義したものを $\mathcal{A}^*(1)$ とおく. ここで簡単のため, $H^0(\mathbb{Q}, \mathcal{A})^\vee$, $H^0(\mathbb{Q}, \mathcal{A}^*(1))^\vee$ は共に pseudo-null R-加群であると仮定する.

<u>p 進 L 関数</u>: $F_{\mathcal{A}} \in R$ で次を満たすものが存在する:

$$\psi_j(F_{\mathcal{A}}) = \beta_j\{\alpha_j L(V_{\psi_j}, 0)\}$$

となる. 但し $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $\beta_j \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ で, $\mathcal{A}$ と ψ_j に依存する explicit に書ける量であり, $\alpha_j L(V_{\psi_j}, 0) \in \overline{\mathbb{Q}}$ でなければならない.

そこで岩澤主予想は次のようになる.

<u>岩澤主予想</u>: $F_{\mathcal{A}} = 0$ なら $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A})^\vee$ は R-torsion ではない. $F_{\mathcal{A}} \neq 0$ なら $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A})^\vee$ は R-torsion で

$$\mathrm{char}_R(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A})^\vee) = (F_{\mathcal{A}})$$

となるであろう.

一般には cyclotomic deformation と異なり, p 進 L 関数 が $F_{\mathcal{A}}=0$ になってしまう場合があることに注意しておく (cf. [Gr3] p.219). $\beta_j \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ という項も必要である.

cyclotomic deformation のようには体の拡大に由来しない deformation $(R, \mathcal{T})$ の重要な例として, Hida による deformation がある (栗原氏の稿も参照). それは次のようなものである: $R=\mathbb{Z}_p[[T]]$ で, specialization の族 $\{\psi_k\}$ としては, $\kappa \in 1+p\mathbb{Z}_p$ を固定して

$$\psi_k : \mathbb{Z}_p[[T]] \to \overline{\mathbb{Q}_p},\ T \mapsto \kappa^{k-2}-1,$$

たちをとる. ここで k は 2 以上の整数を全て走るものとする. そして $G_{\mathbb{Q}}$-表現 $\mathcal{T}$ は次のようなものである:

(i) $\mathcal{T} \cong R^2$ である.

(ii) 各 $k \geq 2$ に対し, weight k の elliptic modular form f_k が存在して, $(\mathcal{T}/P_{\psi_k}) \otimes \mathbb{Q}_p$ が, f_k に付随する 2 次元の Galois 表現 (Deligne による) と同型になる.

実は一般には, R として $\mathbb{Z}_p[[T]]$ の finite flat な拡大を考えねばならないことを一言注意しておく. また, 2 変数の環 $R=\mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]]$ (の finite flat な拡大) 上の同様な表現も作られている. このような Hida deformation の岩澤理論については [Oc2] を参照.

7. p-進 Lie 拡大の岩澤理論

再び V を potentially ordinary な $G_{\mathbb{Q}}$ の p 進表現, T をその lattice, $A=V/T$ とおく. ここで $G_{\mathbb{Q}}$ の作用は左作用としておく.

円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ の代りに, より大きな Galois 拡大 $\mathcal{K}/\mathbb{Q}$ で, $G:=\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/\mathbb{Q})$ が可換とは限らない p 進 Lie 群であるものを考えるのが p 進 Lie 拡大の岩澤理論である (cf. [Ve1]). 考えたいものは, $\mathcal{K}$ 上の Selmer 群

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathcal{K}, A) := \mathrm{Ker}(H^1(\mathcal{K}, A) \to \prod_{w|p} H^1(\mathcal{K}_w^{\mathrm{ur}}, A/F^+(A)^{(w)}) \times \prod_{w\nmid p} H^1(\mathcal{K}_w^{\mathrm{ur}}, A))$$

である. ここで $F^+(A)^{(w)}$ は次のように定義する: §4 の最初で固定した $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\overline{\mathbb{Q}_p}$ への埋め込みを, w の延長であるものとしてとる. §5 の最初で定義した V の filtration を, この埋め込みによって定めたものとする. これによって $F^+(V)^{(w)} := F^1(V)$ とおき, 更に $F^+(A)^{(w)} \subset A$ を定める. $F^+(A)^{(w)}$ たちは互いに $G_{\mathbb{Q}}$ の作用で移り合う. $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathcal{K}, A)$ には G が左から作用するので, Pontrjagin dual $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathcal{K}, A)^\vee$ に G の左作用を $(\sigma f)(s) := f(\sigma^{-1}s)$ により定めれば, 可換とは限らない完備群環

$$\Lambda(G) := \mathbb{Z}_p[[G]]$$

上の左加群となる.

これは次のように "非可換な deformation" の Selmer 群と考えることも出来る: $\tilde{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \Lambda(G)^\times$ を $G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow G$ と $G \hookrightarrow \Lambda(G)^\times$ の合成とする. $\Lambda(G)(\tilde{\rho})^{(\mathrm{r})}$ で, $\Lambda(G)$ 自身を右側 $\Lambda(G)$-加群とみなし, $G_{\mathbb{Q}}$ が左から $\tilde{\rho}$ 倍で作用する加群を表す. $\Lambda(G)$ の作用と $G_{\mathbb{Q}}$ の作用は可換である.

$$\tilde{T} := T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(G)(\tilde{\rho})^{(\mathrm{r})}$$

とおくと, これは有限生成自由右 $\Lambda(G)$-加群となる. 更に $G_{\mathbb{Q}}$ を対角的に作用させることで, 左 $G_{\mathbb{Q}}$-加群とする.

$$\tilde{A} := \tilde{T} \otimes_{\Lambda(G)} (\Lambda(G)^{\vee})$$

とおく. ここで, $\Lambda(G)^{\vee} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Lambda(G), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ は

$$(\lambda f)(\mu) := f(\mu\lambda),\ (f\lambda)(\mu) := f(\lambda\mu)\ \ (\lambda \in \Lambda,\ f \in \Lambda^{\vee})$$

という作用で両側 $\Lambda(G)$-加群とみる. これにより $\tilde{A}$ は discrete な左 $G_{\mathbb{Q}}$-右 $\Lambda(G)$-加群である. また, $F^{+}(\tilde{A}) \subset \tilde{A}$ を (6.3) と同様の方法で定義する. そこで Selmer 群を次のように定める:

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \tilde{A}) := \mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}, \tilde{A}) \to H^1(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}, \tilde{A}/F^{+}(\tilde{A})) \times \prod_{l \neq p} H^1(\mathbb{Q}_l^{\mathrm{ur}}, \tilde{A})).$$

これは $\tilde{A}$ への $\Lambda(G)$ の右作用により, 右 $\Lambda(G)$-加群となる. その Pontrjagin dual を $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \tilde{A})^{\vee} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \tilde{A}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ とおき, $\lambda \in \Lambda(G)$ の作用を

$$(\lambda f)(x) := f(x\lambda),$$

とすることで, 左 $\Lambda(G)$-加群とみなす. すると, 命題 6.1 と同様に, canonical な左 $\Lambda(G)$-同型 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \tilde{A})^{\vee} \cong \mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathcal{K}, A)^{\vee}$ が存在する.

このような枠組で岩澤主予想, すなわち Selmer 群と L 関数の特殊値を結び付けること, を考えたい. しかしそれにはまず, 加群の "characteristic ideal", あるいは "characteristic element" をどうやって取り出すかということから問題となる. [CSS] において, §6 (2) で見た, "pseudo-null" 加群の概念の非可換環への一般化が定義され, (6.4) に類似する, up to pseudo-null での構造定理が得られている. しかし, このことから characteristic element を $\Lambda(G)$ (あるいはその商環) の元として取り出すことには困難がある. 最近ではその代りに, "relative K 群" を用い, その元として加群の characteristic element を定義し, 岩澤主予想を定式化することが有力であるとされているようである (cf. [Ve2], [Co2], [Ka4]).

References

[BD] Bertolini, M and Darmon, H., *Kolyvagin's descent and Mordell-Weil groups over ring class fields*, J. Reine Angew. Math. 412 (1990), 63–74.

[BG] Burns, D. and Greither, C., *On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives*, Invent. Math. 153 (2003), 303–359.

[BK] Bloch, S. and Kato, K., *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, in "The Grothendieck Festschrift" Vol. I, 333–400, Progr. Math., 86, Birkhauser Boston, Boston (1990).

[Co1] Coates, J., *On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory*, Ann. of Math. (2) 95 (1972), 99–116.

[Co2] Coates, J., *Non-commutative Iwasawa theory*, in "代数的整数論とその周辺" 数理解析研究所講究録, to appear.

[CL] Coates, J. and Lichtenbaum, S., *On l-adic zeta functions*, Ann. of Math. (2) 98 (1973), 498–550.

[CP] Coates, J. and Perrin-Riou, B., *On p-adic L-functions attached to motives over* $\mathbb{Q}$, in "Algebraic number theory", 23–54, Adv. Stud. Pure Math., 17, Academic press (1989).

[CSi] Coates, J. and Sinnott, W., *An analogue of Stickelberger's theorem for the higher K-groups*, Invent. Math. 24 (1974), 149–161.

[CSS] Coates, J., Schneider, P. and Sujatha, R., *Modules over Iwasawa algebras*, J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), pp.73–108.

[CW] Coates, J. and Wiles, A., *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. 39 (1977), 223–251.

[DR] Deligne, P and Ribet, K. A., *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math. 59 (1980), 227–286.
[Fl] Flach, M., *A generalisation of the Cassels-Tate pairing*, J. Reine Angew. Math. 412 (1990), 113–127.
[FP] Fontaine, J.-M. and Perrin-Riou, B., *Autour des conjectures de Bloch et Kato: cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L*, in "Motives", 599–706, Proc. Sympos. Pure Math., 55 Part 1 (1994).
[Gr1] Greenberg, R., *The Iwasawa invariants of Γ-extensions of a fixed number field*, Amer. J. Math. 95 (1973), 204–214.
[Gr2] Greenberg, R., *Iwasawa theory for p-adic representations*, in "Algebraic number theory", 97–137, Adv. Stud. Pure Math. 17, Academic Press (1989).
[Gr3] Greenberg, R., *Iwasawa theory and p-adic deformations of motives*, in "Motives", 193–223, Proc. Sympos. Pure Math. 55, Part 2, Amer. Math. Soc. (1994).
[Gr4] Greenberg, R., *Trivial zeros of p-adic L-functions* in "p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture" 149–174, Contemp. Math. 165, Amer. Math. Soc., (1994).
[Gr5] Greenberg, R.,*Iwasawa theory for elliptic curves* in "Arithmetic theory of elliptic curves", 51–144, L. N. M. 1716, Springer (1999).
[GV] Greenberg, R. and Vatsal, V., *On the Iwasawa invariants of elliptic curves*, Invent. Math. 142 (2000), 17–63.
[Ha] 八森祥隆, 楕円曲線の p 進 L 関数, 第 9 回整数論サマースクール「ゼータ関数」報告集 (2002), 135–151.
[HK] Huber, A. and Kings, G., *Bloch-Kato conjecture and main conjecture of Iwasawa theory for Dirichlet characters*, Duke Math. J. 119 (2003), 393–464.
[HT] Hida, H. and Tilouine, J., *On the anticyclotomic main conjecture for CM fields*, Invent. Math. 117 (1994), 89–147.
[Ka1] Kato, K., *Iwasawa theory and p-adic Hodge theory*, Kodai Math. J. 16 (1993), 1–31.
[Ka2] Kato, K., *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, to appear.
[Ka3] 加藤和也, Artin-Hasse-Weil L 関数 (ガロア理論型 L 関数), 第 9 回整数論サマースクール「ゼータ関数」報告集, 39–52 (2002).
[Ka4] 加藤和也, *Conjectures on non-commutative p-adic zeta functions*, in "代数的整数論とその周辺" 数理解析研究所講究録, to appear.
[Ko] Kobayashi, S., *Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes*, Invent. Math. 152 (2003), 1–36.
[Ku1] Kurihara, M., *On the Tate-Shafarevich groups over cyclotomic fields of an elliptic curve with supersingular reduction I*, Invent. Math. 149 (2002), 195–224.
[Ku2] Kurihara, M., *Iwasawa theory and Fitting ideals*, J. Reine Angew. Math. 561 (2003), 39–86.
[Man] Manin, Y. I., *Cyclotomic fields and modular curves*, Russian Math. Surveys 26 (1971), no. 6, 7–78.
[Maz] Mazur, B., *Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields*, Invent. Math. 18 (1972), 183–266.
[Mc] McCallum, W. G. *Greenberg's conjecture and units in multiple $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Amer. J. Math. 123 (2001), 909–930.
[MTT] Mazur, B., Tate, J. and Teitelbaum, J., *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. 84 (1986), 1–48.
[NSW] Neukirch, J., Schmidt, A. and Wingberg, K., *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **323** (2000).
[Oc1] Ochiai, T.,*Control theorem for Bloch-Kato's Selmer groups of p-adic representations* J. Number Theory 82 (2000), no. 1, 69–90.
[Oc2] Ochiai, T., *Euler system for Galois deformation*, preprint (2002).
[Oz1] Ozaki, M., *Iwasawa invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions over an imaginary quadratic field*, in "Class field theory—its centenary and prospect", 387–399, Adv. Stud. Pure Math. 30 (2001).
[Oz2] Ozaki, M., *Non-Abelian Iwasawa theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, preprint (2003).
[Pe] Perrin-Riou, B., *Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques*, Invent. Math. 109 (1992), 137–185.
[Po] Pollack, R., *On the p-adic L-function of a modular form at a supersingular prime*, Duke Math. J. 118 (2003), 523–558.
[Ru] Rubin, K., *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields*, Invent. Math. 103 (1991), 25–68.
[Sch] Schneider, P., *p-adic height pairings II*, Invent. Math. 79 (1982), 329–374.
[Ve1] Venjakob, O., *On the Iwasawa theory of p-adic Lie extensions*, Compositio Math. 138 (2003), 1–54.

[Ve2] Venjakob, O., *Characteristic Elements in Noncommutative Iwasawa Theory*, preprint (2003).
[Wil] Wiles, A., *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math. (2) 131 (1990), 493–540.
[Win] Wingberg, K., *On the maximal unramified p-extension of an algebraic number field*, J. Reine Angew. Math. 440 (1993), 129–156.

e-mail: `yhachi@math.gakushuin.ac.jp`