# $p$ 進 Lie 拡大の岩澤理論における ある岩澤加群の non-pseudo-nullity について

八森 祥隆 (学習院大学理学部数学科)

## 1. 序

$k$ を有限次代数体とし, $K/k$ を必ずしも有限次ではない Galois 拡大とする. 固定した奇素数 $p$ に対し, $K^{\mathrm{ur},p}$ で $K$ の最大不分岐アーベル $p$-拡大を表し,

$$X_K := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur},p}/K)$$

とおく. このとき

$$\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(K/k)$$

が共役によって $X_K$ に連続に作用する. ここではその作用を左作用としておく. これにより、$X_K$ は $\mathcal{G}$ の $\mathbb{Z}_p$ 上の完備群環 (岩澤代数)

$$\Lambda(\mathcal{G}) := \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]] = \varprojlim_U \mathbb{Z}_p[\mathcal{G}/U]$$

上の (左) 加群の構造を持つ. ここで $U$ は $\mathcal{G}$ の開正規部分群全体を走るものとし, 逆極限は自然な写像によるものとする.

さて, いわゆる $p$ 進 Lie 拡大の岩澤理論とは, この Galois 群 $\mathcal{G}$ が (compact) $p$ 進 Lie 群であるとき, $X_K$ の $\Lambda(\mathcal{G})$-加群としての構造を考えるものである. $p$ 進 Lie 群とは, 通常の Lie 群の定義において実数体 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}_p$ に置き換えたもの (cf. [Bou] 第 3 章) であるが, 具体的には $K$ として Galois 表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to GL_d(\mathbb{Q}_p)$$

の kernel の体を考えている ($\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(K/k)$ は $GL_d(\mathbb{Q}_p)$ の閉部分群となる). このような表現は様々な方法で構成されるが, そうした表現ごとに岩澤理論を展開しようという試みである.

古典的には $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_p^d$, つまり $\mathcal{G}$ が可換である場合が研究されてきた ($d = 1$ の場合が本来の岩澤理論である: [SS] など参照) わけだが, ここでの興味は $\mathcal{G}$ が非可換群となる場合にある. このとき $\Lambda(\mathcal{G})$ は非可換環となり, 調べなければならないのは非可換環上の加群の構造である. このような対象物は岩澤理論にとって未開の世界といえる.

以下, $K$ において分岐する $k$ の素点は有限個であると仮定する. またここでは, $\mathcal{G}$ は pro-$p$ 群で, かつ $p$-torsion 元を持たないことを仮定する. このとき $\Lambda(\mathcal{G})$ は zero divisor を持たない. 次のことは良く知られている (古典的には Iwasawa, Greenberg による):

**定理 1.1** (cf. [Ho1] Theorem 7.14, [Oc], [Hr1] Theorem 3.3)**.** $X_K$ は有限生成 $\Lambda(\mathcal{G})$-torsion 加群である.

そこで, 岩澤理論の基本的問題の一つとして次を掲げたい:

**問題 1.2.** $X_K$ は $\Lambda(\mathcal{G})$-加群として pseudo-null かどうか決定せよ.

pseudo-null 加群の定義は §3 で説明するが, $\Lambda(\mathcal{G})$-torsion 加群の中の subclass であり, $\Lambda(\mathcal{G})$-加群としての "小ささ" をはかる一つの概念である. つまり上の問題は, $K$ 上の最大不分岐拡大が大きいか小さいかということを問うているのである.

古典的な可換の場合, 即ち $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_p^d$ のときを少し振り返る. $d=1$ の場合, 分かっていることやそうでないことについてはよく知られているので, ここでは省略する. $d \geq 2$ の場合, 次が有名な一般化 Greenberg 予想である:

**予想 1.3** ([Gr] Conjecture 3.5)**.** $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_p^d$ で, $d$ が $k$ に対し (Leopoldt 予想の下で) 取りうる最大の値 $r_2+1$ ($r_2$ は虚素点の数) であるとき, $X_K$ は $\Lambda(\mathcal{G})$-加群として pseudo-null であろう.

この予想の詳細や知られていることについては [It] を参照. 一方で、$d \geq 2$ が最大でないときには, $X_K$ は必ずしも pseudo-null ではなく, そのような例が Greenberg によって構成されている.

さて, それでは $\mathcal{G}$ が非可換の場合はどうであろうか. これについては, 今までほとんど何も知られていない. それは, 非可換環における正しい "pseudo-null 加群" の定義が与えられたのが, つい最近のことであるためである. 次の定理が今までに知られているほとんど唯一の非自明な結果と言ってよい: $k=\mathbb{Q}(\mu_p)$ とし,

$$K=\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty},\ \sqrt[p^\infty]{p})$$

とおく. $k_{cyc} := \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ とおくと, $G := \mathrm{Gal}(K/k_{cyc})$ と $\Gamma := \mathrm{Gal}(k_{cyc}/k)$ は $\mathbb{Z}_p$ に同型である. つまり, $\mathcal{G} \cong \Gamma \ltimes G$ で, $\mathcal{G}$ は 2 次元 $p$ 進 Lie 群となる.

**定理 1.4** (Sharifi [Sh1], [Sh2])**.** $K/k$ を上の通りとする. このとき $p<1000$ ならば $X_K$ は $\Lambda(\mathcal{G})$ 上 pseudo-null である.

これを見ると, $\dim(\mathcal{G}) \geq 2$ なる非可換 $p$ 進 Lie 拡大では $X_K$ が pseudo-null になりがちであるように感じられる. しかし実際にはそうではなく, かなり広いクラスで, しかも比較的容易に $X_K$ が pseudo-null ではない例を構成することが出来るというのが本稿の主結果である (定理 4.1, 命題 5.1).

最後の節において, どのようなクラスの $K/k$ で $X_K$ は pseudo-null であると期待されるのかについて少し論じる.

なおこれは R. Sharifi との共同研究 [HS] である.

## 2. $\Lambda(\mathcal{G})$ 加群の rank

$\mathcal{G}$ を $p$ 進 Lie 群とする. このとき完備群環 $\Lambda(\mathcal{G}) := \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]$ は次のような性質を持つ.

**命題 2.1** (Lazard[La], cf. [DdMS] Cor. 7.25, 7.26, [Neu])**.** (i) $\Lambda(\mathcal{G})$ は左右 Noether 環である.
(ii) $\mathcal{G}$ が pro-$p$ ならば $\Lambda(\mathcal{G})$ は局所環である. 更に $p$-torsion 元を持たないとすると, $\Lambda(\mathcal{G})$ は 0 以外の zero-divisor を持たない.

そこで, $\Lambda(\mathcal{G})$-加群の rank を定義する. $\mathcal{G}$ が pro-$p$ かつ $p$-torsion 元を持たない場合, 命題 2.1 (ii) によって, $\Lambda(\mathcal{G})$ は "整域" となる. Noether 整域は, 可換でない場合にも次のように "商斜体" を持つ:

**命題 2.2** (cf. [GW] Chap. 9)**.** 環 $R$ が Noether で zero divisor を持たないとする. このとき, 次のような斜体 $Q(R)$ が $R$ 上の同型を除いて一つ存在する: $R \subset Q(R)$ で, 任意の $x \in Q(R)$ はある $r, s \in R$, $s \neq 0$ によって $x = s^{-1}r$ である.

また, $Q(R)$ は $R$-flat である. そこで, $R$-加群の rank を次のように定義する.

**定義 2.3.** 左 $R$-加群 $M$ の rank を

$$\mathrm{rank}_R M := \dim_{Q(R)} Q(R) \otimes_R M$$

で定義する. 但し $\dim_{Q(R)}$ は左 $Q(R)$-ベクトル空間としての次元を表す.

また $\mathrm{rank}_R M = 0$ であることは, $M$ が $R$-torsion, 即ち

"任意の $m \in M$ に対してある $r \in R$ があって $rm = 0$ となる"

という条件と同値であることを注意しておく.

$R = \Lambda(\mathcal{G})$ の場合, 以下のような asymptotic formula が知られている: 任意の compact $p$ 進 Lie 群は, 有限指数の正規開部分群として "uniformly powerful" なものを含む. (cf. [DdMS] Cor. 8.34. uniformly powerful 群の定義は [DdMS] Def. 4.1 参照.) $\mathcal{G}_1$ を $\mathcal{G}$ の uniformly powerful な正規開部分群とし,

$$\mathcal{G}_{n+1} := \overline{\mathcal{G}_n^p[\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_1]}$$

とおく. $\mathcal{G}_n$ は $\mathcal{G}$ の正規開部分群である.

**定理 2.4** (Howson [Ho1] Theorem 2.22, cf. [Hr2] Theorem 1.10)**.** $\mathcal{G}$ が pro-$p$ かつ $p$-torsion 元を持たないとする. $\mathrm{rank}_{\Lambda(\mathcal{G})} M = r$ であることは

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} M_{\mathcal{G}_n} = r[\mathcal{G} : \mathcal{G}_n] + O(p^{n(d-1)})$$

であることと同値である. 但し $d = \dim \mathcal{G}$, $M_{\mathcal{G}_n}$ は $M$ の $\mathcal{G}_n$-coinvariant を表す.

## 3. pseudo-null 加群

$\Lambda(\mathcal{G})$ のホモロジー的性質を説明するために, まず少し一般論を述べる. $R$ を一般の Noether 環とする. 左, あるいは右 $R$-加群 $M$ と整数 $i$ に対して,

$$E^i(M) := \mathrm{Ext}^i_R(M, R)$$

と書くことにする. $M$ が左 $R$-加群なら $E^i(M)$ は右 $R$-加群, $M$ が右加群なら左加群の構造が入る.

**定義 3.1.** $R$-加群 $M$ の grade を, 次で定義する.

$$j(M) := \min\{\ i \mid E^i(M) \neq 0\}.$$

**定義 3.2.** Noether 環 $R$ が Auslander regular であるとは, 大域次元が有限であって, 更に次の条件 (Auslander 条件) を満たすことを言う:

(AC): 任意の右, あるいは左 $R$-加群 $M$ と, 任意の整数 $i$ に対し, $E^i(M)$ の任意の $R$-部分加群 $N$ について $j(N) \geq i$ となる.

**注意 3.3.** これはなにか人工的な条件であるが, もし $R$ が可換で, 更に局所環であるとすると, $R$ の大域次元が有限 (即ち $R$ は通常の意味の regular 局所環) という条件があれば, (AC) は自動的に満たされる (cf. [BrHe] Cor. 3.5.11 (c)). つまり (AC) はある意味, 非可換環特有の条件といえる.

Auslander regular 環 $R$ 上の加群の grade の意味の一つは, 次の定理に現れる.

**定理 3.4** (cf. Björk[Bj] §1)**.** 大域次元 $d$ の Auslander regular 環 $R$ 上の左加群 $M$ には次のような canonical な filtration が入る:

$$M = \Delta^0(M) \supset \Delta^1(M) \supset \Delta^2(M) \cdots \supset \Delta^d(M) \supset 0.$$

ここで $\Delta^i(M)$ は, $M$ の $R$-部分加群 $N$ たちのうちで $j(N) \geq i$ となる最大のものである.

ここで $M = \Delta^1(M)$ であるという条件について考えてみると, これは $E^0(M) := \mathrm{Hom}_R(M, R) = 0$ であるということと同値である. 故に, もし $R$ が zero divisor を持たない環ならば, それは $M$ が $R$-torsion という条件と同値である. そこで, $R$-torsion 加群より "小さい" pseudo-null 加群を次で定義するのは自然である:

**定義 3.5** (Venjakob[Ve1])**.** $R$-加群 $M$ が pseudo-null とは, $M = \Delta^2(M)$, 即ち $j(M) \geq 2$ であることを言う.

**注意 3.6.** $R$ が可換環の場合, それが regular な局所整域であれば,

$$j(M) = \mathrm{ht}(\mathrm{Ann}_R(M))$$

であることが知られている (cf. [BrHe] Cor. 3.5.11 (a), (b)). 但し,

$$\mathrm{Ann}_R(M) := \{\, r \in R \mid \text{全ての } m \in M \text{ に対し } rm = 0\}$$

は $M$ の annihilator ideal, ht は ideal の高さを表す. つまり $j(M) \geq 2$ は $\mathrm{ht}(\mathrm{Ann}_R(M)) \geq 2$ と同値だから, 上の pseudo-null の定義は通常の定義と一致する.

$R$ が非可換の場合にも $\mathrm{Ann}_R(M)$ は $R$ の両側 ideal として定義されるが, まず ideal の高さが定義されていない. その上, $M$ が torsion だとしても, $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$ であることは起こり得る ([Ve2] §4, [HV] §3.2 など参照. torsion 性と $\mathrm{Ann}_R(M)$ の定義の違いに注意.) それが上のような面倒な定義をしなければならない理由である.

さて, $\Lambda(\mathcal{G})$ は多くの場合 Auslander regular 環となる.

**定理 3.7** (Venjakob[Ve1] Theorem 3.26)**.** $\mathcal{G}$ が $p$-torsion 元を持たないとする. このとき $\Lambda(\mathcal{G})$ は Auslander regular 環である. 更にその大域次元は $\dim(\mathcal{G}) + 1$ である.

これにより, $p$-torsion を持たない $\mathcal{G}$ に対し, $\Lambda(\mathcal{G})$-加群の pseudo-null 性を定義することができる. しかしながら, $\Lambda(\mathcal{G})$-加群の pseudo-null 性の判定は, 実際にはこの定義で行うことは難しいように見える. 実は $\mathcal{G}$ と $M$ が次のような特別な場合には, 簡明な判定法があり, 次節で使うのはこの判定法である. ([Ve2] は $\mathcal{G}$ が uniformly powerful の場合のみだが, [Ja] Lemma 2.3 を用いて一般の場合にも言える.)

**定理 3.8** (Venjakob[Ve2] Proposition 5.4)**.** $\mathcal{G}$ は pro-$p$ かつ torsion を持たないとする. 更に $\mathcal{G}$ の閉正規部分群 $G$ で

$$\mathcal{G}/G \cong \mathbb{Z}_p$$

となるものが存在するとする. $\Lambda(\mathcal{G})$-加群 $M$ が $\Lambda(G)$ 上有限生成であるならば, $M$ が $\Lambda(\mathcal{G})$-加群として pseudo-null であることと, $\Lambda(G)$-加群として torsion であることは同値である.

この pseudo-null の定義を用いた up to pseudo-null での構造定理によって, $\Lambda(\mathcal{G})$-加群の $\mu$-不変量が定義される.

**定理 3.9** (Venjakob[Ve1] Theorem 3.40)**.** $\mathcal{G}$ が pro-$p$, torsion-free でかつ uniformly powerful であるとする. 有限生成 $\Lambda(\mathcal{G})$-module $M$ の $p$ 巾 torsion 部分群を $M[p^\infty]$ とおく. このとき $\Lambda(\mathcal{G})$-加群の単射

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \Lambda(\mathcal{G})/p^{r_i}\Lambda(\mathcal{G}) \to M[p^\infty]/\Delta^2(M[p^\infty])$$

で, cokernel が pseudo-null であるものが存在する. そこで, $M$ の $\mu$-不変量を $\mu_{\Lambda(\mathcal{G})}(M) := \sum_{i=1}^m r_i$ で定義する. これは上の準同型のとり方によらない.

$\mathcal{G}$ が一般の場合, uniformly powerful な開部分群 $\mathcal{G}_1$ をとり, $\Lambda(\mathcal{G})$-加群 $M$ の $\Lambda(\mathcal{G}_1)$-加群としての $\mu$-不変量を考えると, $\mu = 0$ か否かは $\mathcal{G}_1$ のとり方によらない. ($\mu$ の値は変わり得る.)

**定義 3.10.** $\Lambda(\mathcal{G})$-加群 $M$ について, uniformly powerful な開部分群 $\mathcal{G}_1$ に対し $\mu_{\Lambda(\mathcal{G}_1)}(M) = 0$ なら $\mu_{\Lambda(\mathcal{G})}(M) = 0$, そうでなければ $\mu_{\Lambda(\mathcal{G})}(M) \neq 0$ と書く.

$\mu$-不変量についても次のことが言える (cf. [Ho2] Lemma 2.7).

**命題 3.11.** $\mathcal{G}$ の閉正規部分群 $G$ で $\mathcal{G}/G \cong \mathbb{Z}_p$ となるものが存在するとする. このとき, $\Lambda(\mathcal{G})$-加群 $M$ が $\Lambda(G)$ 上有限生成であるならば $\mu_{\Lambda(\mathcal{G})}(M) = 0$ である.

**注意 3.12.** $\mathcal{G}$ が uniformly powerful のとき, $M$ 自体の構造定理もある ([CSS1] §1): 単射

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda(\mathcal{G})/L_i \to M/\Delta^2(M)$$

で, cokernel が pseudo-null になる準同型がある. 但し, $L_i$ は reflexive な $\Lambda(\mathcal{G})$ の左 ideal である.

本論とは直接関連しないことではあるが, 次のことを注意しておきたい. $\mathcal{G}$ が可換, 即ち $\Lambda(\mathcal{G})$ が可換環のときは reflexive な ideal は単項 ideal であり, $M$ の characteristic element が $L_i$ の生成元の積により $Q(\Lambda(\mathcal{G}))^\times/\Lambda(\mathcal{G})^\times$ の元として定義された. しかしながら非可換な $\mathcal{G}$ のときには, 単項でない reflexive な左 ideal が存在する (cf. [Ve2] Appendix). そのようなこともあって, この構造定理から何らかの形で, 意味のある characteristic element を取り出すのは難しいように見える.

[CFKSV] では, $\mathcal{G}/G \cong \mathbb{Z}_p$ なる $G$ をもつ $\mathcal{G}$ に対し, $\Lambda(\mathcal{G})$-加群の圏のある部分圏の Grothendieck 群 $K_0(\mathfrak{M}_G(\mathcal{G}))$ を定義し, その元として $M$ の characteristic element $[M]$ を考えることで, 岩澤主予想を定式化した.

これは可換のときはよく知られた定式化と一致するのであるが, ここで非可換の場合が一筋縄でいかない事を示すもう一つの事実として, 次のようなことがある: 可換環の時には pseudo-null であることと $[M] = 0$ は同値であったが, 非可換のときには pseudo-null であっても $[M]$ が $K_0(\mathfrak{M}_G(\mathcal{G}))$ の中で 0 でないということが起こり得る (cf. [CSS2] §4).

つまり岩澤主予想の定式化においては, pseudo-null という概念はあまり重要でないように見える. しかし, 加群の大きさを表す概念としては依然として有用であると思う.

## 4. 主結果

次のような体の Galois 拡大 $K/k$ を考える:

(i) $k$ と $K$ は共に CM 体である. (ii) $K$ において分岐する $k$ の素点は有限個である. (iii) $K$ は $k$ の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-拡大 $k_{cyc}$ を含む. (iv) $\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(K/k)$ は pro-$p$ かつ $p$-torsion を持たない $p$ 進 Lie 群で, $\dim \mathcal{G} \geq 2$ である.

このとき,

$$G := \mathrm{Gal}(K/k_{cyc})$$

とおくと, $\mathcal{G}/G \cong \mathbb{Z}_p$ である.

$k^+$, $K^+$ で $k$, $K$ の最大総実部分体を表すことにする. $\mathrm{Gal}(K/K^+)$ は複素共役からなる位数 2 の群であるが, $X_K$ に共役で作用し, それは $\mathcal{G}$ の作用と可換である. そこで, 複素共役が $\pm 1$ 倍で作用する $X_K$ の部分加群を $X_K^\pm$ と書く (複号同順) ことにすると $X_K^\pm$ はそれぞれ $\mathcal{G}$-加群, 従って $\Lambda(\mathcal{G})$-加群である. そして $p$ が奇素数であることから, 次のように直和分解される:

$$X_K = X_K^+ \oplus X_K^-.$$

$k_{cyc}$ も CM 体であるから, $X_{k_{cyc}}$ も $X_{k_{cyc}} = X^+_{k_{cyc}} \oplus X^-_{k_{cyc}}$ と直和分解される. このとき

"$X^-_{k_{cyc}}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成である"

という条件は, いわゆる (通常の) 岩澤 $\mu$-不変量 $\mu(X^-_{k_{cyc}})$ が 0 になるという条件と同値であり, 一般に成り立つと予想されている. 特に, $k$ がアーベル体の時は証明されている ([FW]). また,

$$\lambda(X^-_{k_{cyc}}) := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} X^-_{k_{cyc}}$$

とおく.

$P^+(K/k_{cyc})$ で, $k_{cyc}$ の最大総実部分体 $k^+_{cyc}$ の素点で $p$ 上になく, $k_{cyc}/k^+_{cyc}$ で分解し $K^+/k^+_{cyc}$ で分岐するもの全体の集合を表すことにする. 次が本稿の主定理である:

**定理 4.1** ([HS]). 上の (i)–(iv) を満たす CM 体の拡大 $K/k$ を考える. 更に $X^-_{k_{cyc}}$ が $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成であるとすると, $X^-_K$ は $\Lambda(G)$ 上有限生成であり,

$$\mathrm{rank}_{\Lambda(G)} X^-_K = \lambda(X^-_{k_{cyc}}) + |P^+(K/k_{cyc})| - \delta$$

である[1]. ここで $\delta$ は, $k$ が 1 の $p$ 乗根の群 $\mu_p$ を含めば 1, 含まなければ 0 とする.

定理 3.8 を用いれば, 直ちに次が言える:

**系 4.2.** 定理と同じ条件のもとで, $\lambda(X^-_{k_{cyc}}) + |P^+(K/k_{cyc})| \geq 1 + \delta$ であることと, $X^-_K$ が $\underline{\Lambda(\mathcal{G})}$ 上の加群として pseudo-null でないことは同値である.

**注意 4.3.** $k^+$ に対する Leopoldt 予想が正しいとする. このとき, $\mathrm{Gal}(K^+/k^+) \cong \mathbb{Z}_p^d$ なる $K^+$ は $d \geq 2$ 以上では存在しない. $K = K^+k$ であり, $\mathcal{G} \cong \mathrm{Gal}(K^+/k^+)$ であるから, $\dim \mathcal{G} \geq 2$ という仮定により, $\mathcal{G}$ はアーベルではありえない. 即ち, 上の (i)–(iv) を満たす, 従って定理 4.1 が成り立つような $K/k$ は非可換拡大でなければならないことを注意しておく.

**注意 4.4.** $\dim \mathcal{G} \geq 2$ で $X_K$ が pseudo-null でないような $K$ の例は, これが初めてのものではない. Greenberg はまず $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_p^d$ $(2 \leq d < r_2 + 1)$ の場合に, 更に非可換の場合についても例えば $\mathcal{G}$ が $PSL_2(\mathbb{Z}_p)$ の開部分群と同型となる場合に, $X_K$ が pseudo-null でない $K$ の例を構成している (いずれも unpublished).

但し, これらの例における $K$ は cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-拡大 $k_{cyc}$ は含んでいない ($K$ は CM でもない). また, $\mu_{\Lambda(\mathcal{G})}(X_K) \neq 0$ を示すことにより pseudo-null でないことを示すため, $X_K/X_K[p^\infty]$ が pseudo-null かどうかは分かっていない.

一方, われわれの $K$ は $k_{cyc}$ を含み, 命題 3.11 によって $X^-_K$ の $\mu_{\Lambda(\mathcal{G})}$-不変量は 0 である. 更には $\mathbb{Z}_p$-torsion free であることも分かる. このような $K$ の例は, この場合のほかは今までには知られていない.

証明の鍵は, 木田の公式 ([Ki]) に尽きる. $G$ の開正規部分群の減少列 $G_n$ $(n \geq 1)$ を, 定理 2.4 において $\mathcal{G}$ に対してとったのと同様にとる. $G_n$ に対応する $K/k_{cyc}$ の部分体を $M_n$ とおく. すると木田の公式 ([Ki]) により, $X^-_{k_{cyc}}$ が $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成ならば $X^-_{M_n}$ もそうであり,

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} X^-_{M_n} = [M_n : k_{cyc}](\lambda(X^-_{k_{cyc}}) - \delta + |P^+(M_n/k_{cyc})|) + \delta - \sum_{v \in P^+(M_n/k)} g^+_v(M_n)$$

となる. ここで, $P^+(M_n/k)$ は $P^+(K/k)$ の定義で $K$ を $M_n$ に変えたものである. また, $\underline{\mathrm{Gal}(M^+_n/k^+_{cyc})}$ の中での, $v$ の分解群 (の一つ) の index を $g^+_v(M_n)$ と書く. 十分大な $n$ につ

[1] 講演レジュメでは, $\cdots - \delta$ ではなく $\cdots + \delta$ と書いてしまいました. ここで訂正致します.

いて, $P^+(M_n/k) = P^+(K/k)$ である. また, $v \in P^+(M_n/k)$ に対して $g_v^+(M_n) = O(p^{(d-1)n})$ であることが分かる. 次に, 自然な写像

$$\rho_n : (X_K)_{G_n} \to X_{M_n}$$

について, kernel と cokernel が共に $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成であり, $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Ker}(\rho_n)) = O(p^{(d-1)n})$, $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Coker}(\rho_n)) = O(1)$ であることが示される. $\Lambda(G)$-有限生成であることは, $(X_K)_G$ が $\mathbb{Z}_p$-上有限生成であることから中山の補題 (cf. [BH]) によって分かる. $X_K$ の $\Lambda(G)$-rank は, 定理 2.4 と上の計算によって得ることが出来る.

**注意 4.5.** $G \cong \mathbb{Z}_p$ の場合には, 木田の公式を用いない別証明も存在する. その証明で用いた手法により、逆に木田の公式の新しい別証明を与えることもできる. 詳しくは [HS] をご覧ください.

## 5. 例

§4 の最初に書いた (i)–(iv) を満たす $K/k$ はどれくらい存在するかを考える.

始めに, $\mathcal{G} \cong \mathrm{Gal}(K^+/k^+)$ であり, $K = K^+k$ であることを注意する. つまり, 総実体 $k^+$ 上にどのような (pro-$p$ の) $p$ 進 Lie 拡大の総実体 $K^+$ が作れるかということがまず問題になる. これはなかなか難しい問題のようである (cf. [Ra], 注意 4.3 等).

ただ, 次のようなことは容易に言える:

**命題 5.1.** $k$ を CM 体とし, 簡単のため $k \supset \mu_p$ とする. 任意の $d \geq 1$ と $n \geq d$ に対し, 次のような Galois 拡大 $K/k$ が無限個存在する: $K$ は CM 体で, $k_{cyc}$ を含み, $\mathrm{Gal}(K/k_{cyc}) \cong \mathbb{Z}_p^d$ かつ $|P^+(K/k)| = n$.

証明の概略を述べる: $S^+$ を $k^+$ の素点の有限集合で $p$ 上の素点を全て含むものとし, $k_{S^+}^+(p)$ を $k^+$ の $S^+$ の外不分岐最大 $p$-拡大とすると,

$$0 \to \bigoplus_{v \in T^+} D_v \to \mathrm{Gal}(k_{S^+}^+(p)/k_{cyc}^+)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_{k_{cyc}}^-, \mu_{p^\infty}) \to 0$$

という完全列が存在する. ([Iw] の Theorem 1, Theorem 3 の証, p.283 (7) 等参照). ここで, $A_{k_{cyc}}$ は, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_{k_{cyc}}^-, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ が $X_{k_{cyc}}^-$ と pseudo-isom になる, ある $\Lambda(\Gamma)$-加群 ($\Gamma := \mathrm{Gal}(k_{cyc}/k)$) である. また $T^+$ で, $S^+$ の中の $p$ 上にない素点で $k/k^+$ で分解するもの全体を表し, $D_v$ で $v$ の $\mathrm{Gal}(k_{S^+}^+(p)/k_{cyc}^+)^{\mathrm{ab}}$ の中の分解群を表す. このとき, $D_v \cong \mathbb{Z}_p$ である. そこで $S^+$ と, $\mathrm{Gal}(k_{S^+}^+(p)/k_{cyc})^{\mathrm{ab}}$ の商を適切にとることによって, $K^+$ を構成出来る. 従って $K$ も構成できる.

この命題により, 例えば $k = \mathbb{Q}(\mu_p)$ ととれば, $X_{k_{cyc}}^-$ は $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成であるので ([FW]), 定理 4.1 から $\mathrm{rank}_{\Lambda(G)} X_K^-$ がいくらでも大きいものが存在し, 従って $X_K^-$ が pseudo-null でないものが無数に存在することが分かる.

この例では, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(K/k)$ は非可換になる (注意 4.3) のだが, $G = \mathrm{Gal}(K/k_{cyc})$ はアーベルである. そこで, $G$ が非可換で定理 4.1 が適用できる例を見つけたいが, 現在のところそれは出来ていない.

まず, $S^+$, $k_{S^+}^+(p)$ を上と同じものとする. このとき, $X_{k_{cyc}}^-$ が $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成であるならば, $\mathrm{Gal}(k_{S^+}^+(p)/k_{cyc}^+)$ は, 有限生成 free pro-$p$ 群になる ([Iw] Theorem 3). しかも $S^+$ を適切に, 位数を大きくとればその rank を大きくできる. 従って $k_{cyc}^+$ 上には任意の pro-$p$ $p$ 進 Lie 群 $G$ に対し $G \cong \mathrm{Gal}(K^+/k_{cyc}^+)$ となる $K^+$ が存在する. 問題は, $K^+$ が $k^+$ 上 Galois になるようにとれるかなのであるが, それがまだよく分からない.

もうひとつのアプローチとしては, Ramakrishna が, $\mathrm{Gal}(K'/\mathbb{Q}) \cong SL_2(\mathbb{Z}_3)$ となる総実ないしCM 体 $K'$ の存在を示している ([Ra]). そこで $p=3$ とおいて, $K := K'\mathbb{Q}(\mu_{3^\infty})$ とおけば, $K$ はCM 体で, $\mathbb{Q}(\mu_3)$ 上 4 次元の 3 進 Lie 拡大となる. しかしこれは pro-3 拡大ではない. 有限次拡大をとることで $K/k$ が pro-3 拡大になるように出来るが, そうするとその $k$ では $X^-_{k_{cyc}}$ が $\mathbb{Z}_3$ 上有限生成かどうか ($\mu = 0$ かどうか) が分からなくなってしまう. いずれにしても定理 4.1 を応用することが出来ない.

一方, pseudo-null になるほうについては次のようなことが分かる.

**命題 5.2.** $k$ を CM 体とし, $k \supset \mu_p$ とする. 更に $X_{k_{cyc}}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成で, $\lambda(X_{k_{cyc}}) = 1$ とする. このとき, $p$ のみが分岐する $k^+$ 上の拡大 $K^+$ で, $\mathrm{Gal}(K^+/k^+_{cyc}) \cong \mathbb{Z}_p$ であるものが唯一つ存在する. $K := K^+k$ とおけば, $K$ は CM 体である. このとき $X^-_K$ は 定理 4.1 によって pseudo-null だが,

$$X^-_K \cong \mathbb{Z}_p$$

であり, $X^-_K \neq 0$ である.

一般の CM 体 $k$ 上の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-拡大 $k_{cyc}$ を考え, $\Gamma := \mathrm{Gal}(k_{cyc}/k)$ とおくと, $X^-_{k_{cyc}}$ は $\Lambda(\Gamma)$ 上の加群として自明でない pseudo-null 加群を持たないというのはよく知られた事実である. しかし命題 5.2 は, $\dim \mathcal{G} \geq 2$ ではそうしたことが成り立たないことを示している. $\mathrm{rank}_{\Lambda(G)} X^-_K \geq 1$ のときに $X^-_K$ が非自明な $\Lambda(\mathcal{G})$ 上の pseudo-null 部分加群を持つかどうかは不明である.

## 6. 問題や注意など

それではどのような体に対して $X_K$ は一般的に pseudo-null であろうか. 以下のようなことが考えられているが, 証拠があまりにも少なく, 予想というには憚られるので, 問題として掲げておく.

**問題 6.1.** $K/k$ が "代数幾何" から来る拡大で, $\dim \mathcal{G} \geq 2$ かつ $K$ が $k_{cyc}$ を含むときには $X_K$ は $\Lambda(\mathcal{G})$ 上 pseudo-null ではないか？

ここで "代数幾何から来る" とは, $k$ 上の代数多様体 $X$ の étale cohomology $H^i_{\text{ét}}(X \otimes \overline{k}, \mathbb{Q}_p(r))$ の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-直和因子の分解体に $K$ がなっていることとする. 定理 4.1 で考えた, $K$ が CM 体で $\dim \mathcal{G} \geq 2$ であるような拡大は代数幾何からは来ないと思われているが, 本当にそうであるかは知られていないようである.

**注意 6.2.** 非可換 $p$ 進 Lie 拡大上の不分岐拡大の研究としては, $G \cong \mathbb{Z}_p \ltimes \mathbb{Z}_p$ の場合を考えた, Kataoka による一連の報告があることを付け加えておく (cf. [Ka1], [Ka2] 他).

**注意 6.3.** 楕円曲線の Selmer 群に関しても類似の理論がある. それは $k$ 上定義された楕円曲線の, $k_{cyc}$ 上の Selmer 群の Pontrjagin dual $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/k_{cyc})^\vee$ の構造を調べるものである. 特に $p$ で good ordinary reduction をもつ楕円曲線について, Selmer 群に関する木田の公式の類似が与えられている ([HM]). これを用いれば, 定理 4.1 の証と全く同じ方法で, $k_{cyc}$ を含む $p$ 進 Lie 拡大 $K/k$ に対する $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/K)^\vee$ の $\Lambda(G)$-rank (但し $G = \mathrm{Gal}(K/k_{cyc})$) の公式を得ることができる: [CH] Cor. 7.10, [Ho2] Theorem 2.8, [HV] Theorem 3.1, [HS] 参照.

## References


[BH] P. Balister and S. Howson, *Note on Nakayama's Lemma for compact $\Lambda$-modules*, Asian J. Math. **1** (1997), 224-229.

[Bj] J.-E. Björk, *Filtered Noetherian rings*, Noetherian rings and their applications, Math. Surv. Monogr., 24 (1987) 59–97.

[Bou] N. ブルバキ (杉浦光夫訳), 数学原論 "Lie 群と Lie 環 2", 東京図書 (1973).
[BrHe] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 39, Cambridge University Press (1993).
[CFKSV] J. Coates, T. Fukaya, K. Kato, R. Sujatha and O. Venjakob, *The $GL_2$ main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, preprint (2004), arXiv:math.NT/0404297.
[CH] J. Coates and S. Howson, *Euler characteristics and elliptic curves II*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 175–235.
[CSS1] J. Coates, P. Schneider and R. Sujatha, *Modules over Iwasawa algebras*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 73–108.
[CSS2] J. Coates, P. Schneider and R. Sujatha, *Links between cyclotomic and $GL_2$ Iwasawa theory*, Documenta Math., Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth birthday (2003), 187–215.
[DdMS] J. Dixon, M. du Sautoy, A. Mann and D. Segal, *Analytic pro-p groups*, second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 61, Cambridge University Press (1999).
[FW] B. Ferrero and L. Washington, *The Iwasawa invariant $\mu_p$ vanishes for abelian number fields*, Ann. of Math. (2) **109** (1979), 377–395.
[GW] K. Goodearl and R. Warfield *An introduction to noncommutative Noetherian rings*, LMS Student Texts 16, Cambridge University Press (1989).
[Gr] R. Greenberg, *Iwasawa theory—past and present*, Class Field Theory—Its Centenary and Prospect, Adv. Stud. Pure Math. 30, (2001), 335–385.
[HM] Y. Hachimori and K. Matsuno, *An analogue of Kida's formula for the Selmer groups of elliptic curves*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), 581–601.
[HS] Y. Hachimori and R. Sharifi, *On the failure of pseudo-nullity of Iwasawa modules*, preprint (2004).
[HV] Y. Hachimori and O. Venjakob, *Completely faithful Selmer groups over Kummer extensions*, Documenta Math., Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003), 443–478.
[Hr1] M. Harris, *p-adic representations arising from descent on Abelian varieties*, Compositio Math. **39** (1979), 177–245.
[Hr2] M. Harris, *Correction to: p-adic representations arising from descent on abelian varieties*, Compositio Math. **121** (2000), 105–108.
[Ho1] S. Howson, *Iwasawa theory of elliptic curves for p-adic Lie extensions*, Ph.D. thesis, University of Cambridge (1998).
[Ho2] S. Howson, *Euler characteristics as invariants of Iwasawa modules*, Proc. London Math. Soc. (3) **85** (2002), 634–658.
[It] 伊藤剛司, ある 4 次体の multiple $\mathbb{Z}_p$-拡大について, this volume.
[Iw] K. Iwasawa, *Riemann-Hurwitz formula and p-adic Galois representations for number fields*, Tohoku Math. J. (2) **33** (1981), 263–288.
[Ja] U. Jannsen, *Iwasawa modules up to isomorphism*, Algebraic number theory – in honor of K. Iwasawa, Adv. Stud. Pure Math. 17 (1989), 171–207.
[Ka1] 片岡俊孝, 岩澤類数公式の一般化 II, 数理解析研究所講究録 440 "$\mathbb{Z}_p$ 拡大およびその関連理論の研究" (1981), 103–118.
[Ka2] 片岡俊孝, 非 Galois 拡大体の岩澤理論, 数理解析研究所講究録 658 "代数的整数論: 最近の種々の話題について" (1988), 34–42.
[Ki] Y. Kida, *l-extensions of CM-fields and cyclotomic invariants*, J. Number Theory **12** (1980), 519–528.
[La] M. Lazard, *Groupes analitiques p-adiques*, Publ. Math. IHES **26** (1965), 389–603.
[Neu] A. Neumann, *Completed group algebras without zero divisors*, Arch. Math. (Basel) **51** (1988), 496–499.
[Oc] Y. Ochi, *Iwasawa modules via homotopy theory*, Ph.D. thesis, University of Cambridge (1999).
[Ra] R. Ramakrishna, *Deforming an even representation*, Invent. Math. **132** (1998), 563–580.
[Sh1] R. Sharifi, *Massey products and ideal class groups*, preprint (2003).
[Sh2] R. Sharifi, *Iwasawa theory and the Eisenstein ideal*, in preparation.
[SS] 2003 年度整数論サマースクール "岩澤理論" 報告集 (2004).
[Ve1] O. Venjakob, *On the structure theory of the Iwasawa algebra of a p-adic Lie group*, J. Eur. Math. Soc. **4** (2002), 271–311.
[Ve2] O. Venjakob, *A noncommutative Weierstrass preparation theorem and applications to Iwasawa theory*, with an appendix by D. Vogel, J. Reine angew. Math. **559** (2003), 153–191.

e-mail: `yhachi@math.gakushuin.ac.jp`

現在:

東京大学大学院数理科学研究科

21 世紀 COE プログラム研究拠点形成特任研究員

e-mail: `yhachi@ms.u-tokyo.ac.jp`