基礎数学 A 演習補足資料：全称と存在

松本雄也 (matsumoto.yuya.m@gmail.com)

2019 年 05 月 10 日（金）

全称命題・存在命題の形式および読み方

1 (全称命題)**.** $P(x)$ は x という変数をもつ条件とし[*1]，A を集合とします．このとき，「$\forall x \in A,\ P(x)$」という形の命題を考え，このような命題を 全称命題 と言います．

2 (全称命題の真偽)**.** この命題の真偽は，集合 A に属する 任意の（すべての，あらゆる）元 x に対して $P(x)$ が真になるとき，真と定め，それ以外のとき偽と定めます．

3 (全称命題の読み方)**.** これはただ一つではありませんが，例として「A の 任意の 元 x に対し， $P(x)$ が成り立つ」．

4 (全称命題の例)**.** 例として「$\forall x \in \boldsymbol{Z},\ \frac{x^2+x}{2} \in \boldsymbol{N}$」を考えます．読み方の例は「$\boldsymbol{Z}$ の 任意の 元 x に対し， $\frac{x^2+x}{2} \in \boldsymbol{N}$」あるいは噛み砕いて「任意の整数 x に対し，$\frac{x^2+x}{2}$ は自然数である」．

5 (注：「すべて」)**.** 数学の文脈で すべて と言ったら本当に一つ残らずすべてです．ほとんどの元で成り立つ，99% の元で成り立つ，一つを除いてすべての元で成り立つ，というだけでは足りません．

6 (存在命題)**.** 上と同様に，$P(x)$ は x という変数をもつ条件とし，A を集合とするとき，「$\exists x \in A,\ P(x)$」という形の命題を考え，このような命題を 存在命題 と言います．

7 (存在命題の真偽)**.** この命題の真偽は，集合 A に属する元 x で $P(x)$ が真になるものが（1 つでも 2 つ以上でも）存在する とき，真と定め，それ以外のとき偽と定めます．

8 (存在命題の読み方)**.** これもただ一つではありませんが，例として，「A の ある 元 x が存在して， $P(x)$ が成り立つ」や「A の ある 元に対して，$P(x)$ が成り立つ」．

[*1] 条件の代わりに述語とも言います．例としては，「$x = 0$」「$x \neq \pi$」「$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$」「$x^2 > 0$」「$x^6 \in \boldsymbol{Q}$ かつ $\sin(x) > 0.5$」「x は素数である」「x は 4 で割ると 1 余る整数である」「$x = x$」「$x \neq x$」「$x = x + 1$」などがあります．

9 (存在命題の読み方：注)**.** これを「$P(x)$ を成り立たせる A の元 x が存在する」と言ってもよいのですが，量化を 2 つ以上含む文をこの方法で読むと曖昧な文になりやすいという欠点があるので（25–26 項参照），とりあえずこの読み方は避けた方が安全です．

10 (存在命題の例)**.** 例として「$\exists x \in \boldsymbol{Z},\ \frac{x^2+x}{2} \in \boldsymbol{N}$」を考えます．読み方の例は「$\boldsymbol{Z}$ の元 x が存在して，$\frac{x^2+x}{2} \in \boldsymbol{N}$」あるいは噛み砕いて「整数 x が存在して，$\frac{x^2+x}{2}$ は自然数である」．

11 (注：「s.t.」)**.** 「$\exists x \in A,$」の後に「s.t.」を書くこともできます．無くてもかまいません．英語の「such that」の略語です．（英語での読み方については 31 項の余談を参照．）全称命題の方では使いません．

全称命題・存在命題の否定命題

意味を考えれば，否定命題はそれぞれ次のように表されることが分かります．

12 (全称命題の否定命題)**.** 「$\forall x \in A,\ P(x)$」の否定命題は「$\exists x \in A,\ \neg P(x)$」です．

13 (存在命題の否定命題)**.** 「$\exists x \in A,\ P(x)$」の否定命題は「$\forall x \in A,\ \neg P(x)$」です．

14 (確認のための練習問題)**.** これと 2,7 項で定めた真偽が対応していることを確認せよ．

全称命題・存在命題の証明の書き方

15 (全称命題の証明の書き方（の 1 つ）)**.** 「$\forall x \in A,\ P(x)$」を証明することを考えます．A のどの元に対しても $P(x)$ が成り立つことを確認しなければいけません．一つ一つの元について個別に議論することは現実的でないので，『A の元を文字，例えば x，で表し，何らかの（x がどのような元であっても成り立つ）議論を行って $P(x)$ が成り立つことを示す』方針で行きましょう．

> x を A の元とする．
> …………
> よって $P(x)$ が成り立つ．
> 以上より，「$\forall x \in A,\ P(x)$」が示された．

2 段落目は何らかの議論を書きます，その内容はもちろん示すべき命題によって変わります．（複数段落にわたっても構いません．）

4 段落目は慣れてきたら省略してしまってよいでしょう．

16 (全称命題の証明の書き方の別方針)**.** 上は証明の方針の 1 つですが，これ以外にも方針はありえます．例えば，『$P(x)$ を成り立たせない元 x があると仮定し，何らかの議論を行って矛盾を導き，背理法により任意の元 x に対し $P(x)$ が成り立つことを帰結する』という方針が役に立つ場合もあるでしょう．

17 (全称命題の証明の書き方：例)**.** 例として「$\forall x \in \boldsymbol{Z},\ \frac{x^2+x}{2} \in \boldsymbol{Z}$」を考えると，例えば次のように証明することができます．

> x を $\boldsymbol{Z}$ の元とする．
>
> x は整数なので偶数または奇数のどちらかである．x が偶数のとき，整数 n を用いて $x = 2n$ と書くことができ，このとき $\frac{x^2+x}{2} = n(2n+1)$ は整数である．x が奇数のとき，整数 n を用いて $x = 2n+1$ と書くことができ，このとき $\frac{x^2+x}{2} = (2n+1)(n+1)$ は整数である．
>
> よって，（x が偶数でも奇数でも）$\frac{x^2+x}{2}$ は整数である．
>
> 以上より，「$\forall x \in \boldsymbol{Z},\ \frac{x^2+x}{2} \in \boldsymbol{Z}$」が示された．

18 (存在命題の証明の書き方（の 1 つ）)**.** 「$\exists x \in A,\ P(x)$」を証明することを考えます．A の元で $P(x)$ を満たすものが一つでも存在すればいいので，可能ならば $P(x)$ を満たす元 x を具体的に挙げてしまうのが早いでしょう．

> x を○○○とする．
>
> …………
>
> よって $P(x)$ が成り立つ．
>
> 以上より，「$\exists x \in A,\ P(x)$」が示された．

1 段落目の○○○では A の元を具体的に書きます．（1 段落目の前に何らかの準備をしておき，そこで用意した記号を○○○の中で使うこともあるでしょう．）

2 段落目は何らかの議論を書きます，その内容はもちろん示すべき命題によって変わります．（複数段落にわたっても構いません．）

4 段落目は慣れてきたら省略してしまってよいでしょう．

19 (存在命題の証明の書き方の別方針)**.** 上は証明の方針の 1 つですが，これ以外にも方針はありえます．例えば，『$P(x)$ を成り立たせる元 x が存在しない（言い換えると，任意の元 x に対し $\neg P(x)$ が成り立つ）と仮定し何らかの議論を行って矛盾を導き，背理法によりある元 x に対し $P(x)$ が成り立つことを帰結する』という方針が役に立つ場合もあるでしょう．

20 (存在命題の証明の書き方 : 例)**.** 例として「$\exists x \in \boldsymbol{Z},\ x^2 - 8x < -12$」を考えると，例えば次のように証明することができます．

> $x = 5$ とする．
> $x^2 - 8x = -15$ であり，これは -12 より小さい．
> したがって，$x^2 - 8x < -12$ である．
> 以上より，「$\exists x \in \boldsymbol{Z},\ x^2 - 8x < -12$」が示された．

21 (上の証明に対する想定質問)**.** 「この証明で，『$x = 5$』がどこから出てきたのか分からない」．

質問が「だからこの証明はまずいのではないか？」ということであれば，何もまずくありません．存在命題は条件を成り立たせる元が 1 つ以上存在することを意味しており，この証明はまさにそれを証明しているからです．

一方で，質問は「この証明を書いた人はどうやって $x = 5$ という例にたどり着いたのか」ということかもしれません．自然な疑問ですね．質問できる状況（例えば，黒板で発表する形式の演習）だったらぜひ聞いてみましょう．

回答は『いろいろな整数 x を試していたら $x = 5$ でうまく行った』かもしれません．勘や試行錯誤は大切です．一般性をもった解法をみつけるのが難しい（またはそんな解法が存在しない）ため勘や試行錯誤に頼らざるをえない場合もあるでしょう．

あるいは，回答は『式 $x^2 - 8x < -12$ を変形すると $(x-2)(x-6) < 0$ になった．実数に関する不等式の一般論から，これは $2 < x < 6$ を満たす実数 x で成り立ち，その他の実数 x では成り立たない．したがって $2 < x < 6$ を満たす整数をもってくればいいと分かり，その中から一つを選んだ』かもしれません．類似の命題についてもほぼ同じ方針で証明または反証できる，一般性のある解法ですね．ただし，「証明が正しいか否か」という観点ではこのような背景がなくても構わないということも押さえておきましょう．

量化が複数ある場合

22 (量化)**.** 説明の都合上，言葉を導入しておきます．

「$\forall x$（すべての x に対して）」「$\exists x$（1 つ以上の x に対して）」といった，量を指定することを総称して**量化**と言い，前者を**全称量化**，後者を**存在量化**と言います．記号 $\forall$, $\exists$ のことは（全称／存在）**量化子**または（全称／存在）**量化記号**と言います．

量化が複数ある文も，1 つの場合と特に変わりはなく，順番に処理していけばよいですが，全称量化と存在量化の順番を入れ替えると意味が変わってしまうことが要注意です．

以下，$P(x,y)$ は x,y という 2 つの変数をもつ条件とします．*2

23 (全称量化を 2 つ含む例)**.** まず「$\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ P(x,y)$」を考えます．これは「$A$ の <u>任意の</u> 元 x に対し， $\forall y \in B,\ P(x,y)$ が成り立つ」であり，「A の <u>任意の</u> 元 x に対し， B の <u>任意の</u> 元 y に対し， $P(x,y)$ が成り立つ」です．（3 項参照）

次に「$\forall y \in B,\ \forall x \in A,\ P(x,y)$」を考えると，これは「$B$ の <u>任意の</u> 元 y に対し， A の <u>任意の</u> 元 x に対し， $P(x,y)$ が成り立つ」です．

少し考えると，この 2 つは結局同じことを意味していることが分かります．

24 (存在量化を 2 つ含む例)**.** まず「$\exists x \in A,\ \exists y \in B,\ P(x,y)$」を考えます．これは「$A$ の <u>ある</u> 元 x <u>が存在して</u>， $\exists y \in B,\ P(x,y)$ が成り立つ」であり，「A の <u>ある</u> 元 x <u>が存在して</u>， B の <u>ある</u> 元 y <u>が存在して</u>， $P(x,y)$ が成り立つ」です．（8 項参照）

次に「$\exists y \in B,\ \exists x \in A,\ P(x,y)$」を考えると，これは「$B$ の <u>ある</u> 元 y <u>が存在して</u>， A の <u>ある</u> 元 x <u>が存在して</u>， $P(x,y)$ が成り立つ」です．

少し考えると，この 2 つは結局同じことを意味していることが分かります．

25 (全称量化と存在量化を 1 つずつ含む例)**.** まず「$\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ P(x,y)$」を考えます．これは「$A$ の <u>任意の</u> 元 x に対し，$\exists y \in B,\ P(x,y)$ が成り立つ」であり，「A の <u>任意の</u> 元 x に対し，B の <u>ある</u> 元 y <u>が存在して</u>，$P(x,y)$ が成り立つ」です．（3,8 項参照）

次に「$\exists y \in B,\ \forall x \in A,\ P(x,y)$」を考えます．これは「$B$ の <u>ある</u> 元 y <u>が存在して</u>，$\forall x \in A,\ P(x,y)$ が成り立つ」であり，「B の <u>ある</u> 元 y <u>が存在して</u>，A の <u>任意の</u> 元 x に対し， $P(x,y)$ が成り立つ」です．

この 2 つは異なります．（演習問題集の問題 8,9,10 や本稿の 29 項の問題を参照．）

---

*2 例としては，「$x = y$」「$x < y$」「$x^2 + 3xy + y^5 = 100$」「$x \notin \boldsymbol{Q}$ かつ $y \in \boldsymbol{Q}$ かつ $|x - y| < 0.01$」などがあります．

26 (注：存在量化の読み方)**.** 存在命題「$\exists y \in B,\ P(x,y)$」を「$P(x,y)$ を成り立たせる B の元 y が存在する」と読むことにしていると，前項の 2 つをどちらも「A の 任意の 元 x に対し $P(x,y)$ を成り立たせる B の元 y が存在する」と読むことになってしまい，この 2 つを区別できないのは非常にまずい.

27 (証明の書き方：例 1)**.** 「$\forall x \in \boldsymbol{N},\ \exists y \in \boldsymbol{Z},\ y < x$」を考えます．15 節，18 節の構図を組み合わせて（少し簡略化して），次のような証明を書くことができます.

> x を自然数とする.
> y を○○○とすると，　　　　【※この○○○には x が登場してよい】
> $y < x$ が成り立つ.
> 以上より，「$\forall x \in \boldsymbol{N},\ \exists y \in \boldsymbol{Z},\ y < x$」が示された.

28 (証明の書き方：例 2)**.** 「$\exists y \in \boldsymbol{Z},\ \forall x \in \boldsymbol{N},\ y < x$」を考えます．15 節，18 節の構図を組み合わせて（少し簡略化して），次のような証明を書くことができます.

> y を○○○とする.　　　　【※この○○○には x を用いることはできない】
> x を自然数とすると，$y < x$ が成り立つ.
> 以上より，「$\exists y \in \boldsymbol{Z},\ \forall x \in \boldsymbol{N},\ y < x$」が示された.

練習問題

上では「$\forall x \in A$」「$\exists x \in B$」という形のみ扱いましたが，もう少し一般に「$\forall n \geq N$」「$\exists \delta > 0$」という形の量化も同様に扱うことができます．それぞれ「N 以上の 任意の 整数 n に対し……」「0 より大きい ある 実数 δ が存在し……」を意味します.

他の不等号（$<, \leq$）についても同様です.

29 (練習問題)**.** 以下の各命題について，真偽を判定せよ.（ここでは，単に真か偽かを述べるだけではなく，真にせよ偽にせよそのことの証明を与えることまでを問うています.）

b_n（$n = 1, 2, 3, \ldots$）は $b_n = \dfrac{100}{n}$ で定められる数列とします.

なお，以下のうちいくつかは，基礎解析学や線形代数学や基礎数学で登場した（または今後登場する）さまざまな概念に対応する命題です.

(1) $\forall x \in \boldsymbol{Z},\ x^2 + 3x$ は偶数である.
(2) $\exists x \in \boldsymbol{Z},\ x^2 + 3x$ は偶数である.

(3) $\forall x \in \boldsymbol{Z},\ x^2+4x$ は奇数である.

(4) $\exists x \in \boldsymbol{Z},\ x^2+4x$ は奇数である.

(5) $\exists x \in \boldsymbol{Z},\ x^2-5x+6<0.$

(6) $\exists x \in \boldsymbol{R},\ x^2-5x+6<0.$

(7) $\forall x \in \boldsymbol{R},\ \forall y \in \boldsymbol{R},\ x \geq y.$

(8) $\exists y \in \boldsymbol{R},\ \exists x \in \boldsymbol{R},\ x \geq y.$

(9) $\exists x \in \boldsymbol{R},\ \forall y \in \boldsymbol{R},\ x \geq y.$

(10) $\forall y \in \boldsymbol{R},\ \exists x \in \boldsymbol{R},\ x \geq y.$

(11) $\exists x \in \boldsymbol{R},\ \forall y \in \boldsymbol{N},\ x \leq y.$

(12) $\forall y \in \boldsymbol{N},\ \exists x \in \boldsymbol{R},\ x \leq y.$

(13) $\varepsilon=1, n_0=1000$ とするとき，$\forall n>n_0,\ |b_n|<\varepsilon.$

(14) $\varepsilon=\frac{1}{100}, n_0=1000$ とするとき，$\forall n>n_0,\ |b_n|<\varepsilon.$

(15) $\varepsilon=\frac{1}{100}$ とするとき，$\exists n_0 \in \boldsymbol{N},\ \forall n>n_0,\ |b_n|<\varepsilon.$

(16) $\varepsilon=\frac{1}{1000000}$ とするとき，$\exists n_0 \in \boldsymbol{N},\ \forall n>n_0,\ |b_n|<\varepsilon.$

(17) $\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 \in \boldsymbol{N},\ \forall n>n_0,\ |b_n|<\varepsilon.$

(18) $\forall x \in \boldsymbol{R},\ \forall y \in \boldsymbol{R},\ x^2=y^2$ ならば $x=y.$

(19) $\forall x \in \boldsymbol{R},\ \forall y \in \boldsymbol{R},\ x^3=y^3$ ならば $x=y.$

(20) $\forall z \in \boldsymbol{R},\ \exists x \in \boldsymbol{R},\ z=x^2.$

(21) $\forall z \in \boldsymbol{R},\ \exists x \in \boldsymbol{R},\ z=x^3.$

(22) $\forall x \in \boldsymbol{R}^2,\ \exists a \in \boldsymbol{R},\ \exists b \in \boldsymbol{R},\ x=a(1,2)+b(3,4).$

(23) $\forall x \in \boldsymbol{R}^2,\ \exists a \in \boldsymbol{R},\ \exists b \in \boldsymbol{R},\ \exists c \in \boldsymbol{R},\ x=a(2,3)+b(4,5)+c(6,7).$

(24) $\forall a \in \boldsymbol{R},\ \forall b \in \boldsymbol{R},\ a(1,2)+b(3,4)=(0,0)$ ならば $a=b=0.$

(25) $\forall a \in \boldsymbol{R},\ \forall b \in \boldsymbol{R},\ \forall c \in \boldsymbol{R},\ a(2,3)+b(4,5)+c(6,7)=(0,0)$ ならば $a=b=c=0.$

(26) $\varepsilon=1$ とするとき，$\forall x \in \boldsymbol{R},\ \exists y \in \boldsymbol{Q},\ |x-y|<\varepsilon.$

(27) $\varepsilon=\frac{1}{100}$ とするとき，$\forall x \in \boldsymbol{R},\ \exists y \in \boldsymbol{Q},\ |x-y|<\varepsilon.$

(28) $\forall \varepsilon>0,\ \forall x \in \boldsymbol{R},\ \exists y \in \boldsymbol{Q},\ |x-y|<\varepsilon.$

(29) $x=0$ とするとき，$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall y \in \boldsymbol{R},\ |x-y|<\delta$ ならば $|x^3-y^3|<\varepsilon.$

(30) $x=1000$ とするとき，$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall y \in \boldsymbol{R},\ |x-y|<\delta$ ならば $|x^3-y^3|<\varepsilon.$

(31) $\forall x \in \boldsymbol{R},\ \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall y \in \boldsymbol{R},\ |x-y|<\delta$ ならば $|x^3-y^3|<\varepsilon.$

(32) $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x \in \boldsymbol{R},\ \forall y \in \boldsymbol{R},\ |x-y|<\delta$ ならば $|x^3-y^3|<\varepsilon.$

問題 (5,6) は次から拝借しました.

嘉田勝,「証明を理解するための考え方」,『数学セミナー』2009 年 5 月号, 20–23.

余談

30 (余談：ほとんどすべて)**.** （5 項の続き）数学の文脈ですべてと言ったら本当に一つ残らずすべてです．それはそれとして，何らかの意味で少数派である例外を除いては成り立つ，という形の定理も多く存在します．この場合も，何が「少数派」であるかは明確に定義されています．何が「少数派」かは場合によりますが，例えば「有限個である」「高々可算無限個である」「“割合” が 0% である」「真の閉部分集合に属する」などを考えることがあります．

31 (余談：英語での読み方)**.** 量化する quantify, 量化子 quantifier, 全称量化子 universal quantifier, 存在量化子 existential quantifier, 整数 integer, 要素/元 element, 集合 set.

（余談として，日本語における「2 個」「多い」「すべて」など，また英語における all, many, some, few など，数量を表す言葉を総称して数量詞と言うそうですが，この「数量詞」も英語で quantifier と言うそうです.）

「$\forall x \in \boldsymbol{Z},\ \frac{x^2+x}{2} \in \boldsymbol{N}$」の読み方の例として「*For any* element x of $\boldsymbol{Z}$, $\frac{x^2+x}{2} \in \boldsymbol{N}$ is true.」あるいはもう少し嚙み砕いて「*For any* integer x, $\frac{x^2+x}{2}$ is a natural number.」がある．語順を入れ替えて「$\frac{x^2+x}{2}$ is a natural number *for any* integer x.」と読むこともできる（この方が自然な英語な気がする？）が，後述の欠点があるのでとりあえず避けた方がよい．

「$\exists x \in \boldsymbol{Z},\ \frac{x^2+x}{2} \in \boldsymbol{N}$」の読み方の例として「*There exists* an element x of $\boldsymbol{Z}$ such that $\frac{x^2+x}{2} \in \boldsymbol{N}$ is true.」あるいはもう少し嚙み砕いて「*There exists* an integer x such that $\frac{x^2+x}{2}$ is a natural number.」がある．

「$\exists x \in \boldsymbol{R},\ \forall y \in \boldsymbol{N},\ x \geq y$」の読み方の例として「*There exists* a real number x such that, *for any* natural number y, the inequality $x \geq y$ is true.」がある．これを「*There exists* a real number x such that the inequality $x \geq y$ is true *for any* natural number y.」と読むと何がまずいだろうか？

「$\forall y \in \boldsymbol{N},\ \exists x \in \boldsymbol{R},\ x \geq y$」の読み方の例として「*For any* natural number y, *there exists* a real number x such that the inequality $x \geq y$ is true.」がある．これを「*There exists* a real number x such that the inequality $x \geq y$ is true *for any* natural number y.」と読むと何がまずいだろうか？

参考文献

関連する内容をかなり詳しく扱った文献として次の本（の第 1 部）を挙げておきます．

嘉田勝,『論理と集合から始める数学の基礎』, 日本評論社, 2008.