基礎数学 B 演習問題：関係

松本雄也 (matsumoto.yuya.m@gmail.com)
2019 年 09 月 20 日（金）

教科書・ノート・インターネット等の **参照 OK** です．また **相談も OK** です．

問題 1001. 以下の各項で定める集合 X および X 上の関係 ρ に対して，反射律・対称律・反対称律・推移律のうち成り立つものに○を，成り立たないものに×をつけよ．

(1) $X = \mathfrak{P}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$ の冪集合（$\boldsymbol{R}$ の部分集合全体の集合），ρ は包含関係「$\subset$」（つまり，$A \rho B$ は「$A \subset B$」）． （反射・対称・反対称・推移）

(2) $X = \mathfrak{P}(\boldsymbol{R})$, $A \rho B$ は「$A \setminus B$ は高々可算集合」． （反射・対称・反対称・推移）

(3) $X = \boldsymbol{R}^2$, $(x_1, x_2) \rho (y_1, y_2)$ は「$x_1 \leq y_1$ かつ $x_2 \leq y_2$」．（反射・対称・反対称・推移）

(4) $X = \boldsymbol{R}^2$, $(x_1, x_2) \rho (y_1, y_2)$ は「$x_1 \leq y_1$ または $x_2 \leq y_2$」．（反射・対称・反対称・推移）

(5) $X = \boldsymbol{R}^2$, $(x_1, x_2) \rho (y_1, y_2)$ は「$x_1 < y_1$ または，$x_1 = y_1$ かつ $x_2 \leq y_2$」．
（反射・対称・反対称・推移）

(6) $X = \boldsymbol{R}$, $x \rho y$ は「$x = y - 1$」． （反射・対称・反対称・推移）

(7) $X = \boldsymbol{R}$, $x \rho y$ は「$x = 1 - y$」． （反射・対称・反対称・推移）

(8) X は平面内の三角形全体の集合，$T_1 \rho T_2$ は「T_1 と T_2 は頂点を 1 つ以上共有する」． （反射・対称・反対称・推移）

(9) X は平面内の三角形全体の集合，$T_1 \rho T_2$ は「T_1 と T_2 は相似である」．
（反射・対称・反対称・推移）

(10) $X = \boldsymbol{R}$, $x \rho y$ は「ある $z \in X$ が存在して $x + z^2 = y$」．（反射・対称・反対称・推移）

(11) $X = \boldsymbol{C}$, $x \rho y$ は「ある $z \in X$ が存在して $x + z^2 = y$」．（反射・対称・反対称・推移）

(12) $X = \boldsymbol{Z}$, $n_1 \rho n_2$ は「$n_1 - n_2$ は 5 の倍数である」．（反射・対称・反対称・推移）

問題 1002. 問題 1001 に登場した関係のうち順序関係になっているものをすべて挙げよ．また，全順序でないものについて，比較可能でない 2 元（$x, y \in X$ で，$x \rho y$ も $y \rho x$ も成り立たないもの）の例を挙げよ．

問題 1003. 問題 1001 に登場した関係のうち同値関係になっているものをすべて挙げよ．商集合について既に習っているならば，同値類がいくつあるか答えよ．

余裕のある人はチャレンジ問題もやってみて下さい．

チャレンジ問題 2001. 以下で定める X, ρ に対して，問題 1001,1002,1003 と同様のことを答えよ．ただし同値類の個数については難しい（／解答不能な）ものもあるので答えなくてよい．

(13) $X = \boldsymbol{R}^2$, $(x_1, x_2)\ \rho\ (y_1, y_2)$ は「$x_1y_2 - x_2y_1 = 0$」.（反射・対称・反対称・推移）

(14) $X = \mathfrak{P}(\boldsymbol{R})$, $A\ \rho\ B$ は「A と B の間に全単射が存在する」.（反射・対称・反対称・推移）

(15) $X = M_2(\boldsymbol{R})$ は実 2×2 行列全体の集合，$A\ \rho\ B$ は「ある $P, Q \in X$ が存在して $PAQ = B$」.（反射・対称・反対称・推移）

(16) $X = S_n$ は n 文字の置換全体の集合（n は自然数)，$\sigma_1\ \rho\ \sigma_2$ は「ある $\tau \in S_n$ が存在して $\tau^{-1}\sigma_1\tau = \sigma_2$」.（反射・対称・反対称・推移）

(17) X はコーシー有理数列（つまり，有理数列 $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ であって条件「任意の有理数 $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在し任意の自然数 $n \geq N$ および $m \geq N$ に対して $|a_n - a_m| < \varepsilon$」を満たすもの）全体の集合，$(a_n)\ \rho\ (b_n)$ は「任意の有理数 $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在し任意の自然数 $n \geq N$ に対して $|a_n - b_n| < \varepsilon$」.（反射・対称・反対称・推移）